

Площади и периметры клетчатых прямоугольников

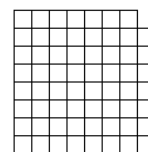
Здесь мы рассматриваем только прямоугольники на клетчатой бумаге, у которых границы идут по линиям сетки. Все разрезы тоже должны идти по линиям сетки. Сторона одной клетки равна 1, поэтому площадь прямоугольника равна числу клеток в нём. Прямоугольники *равны*, если оба их размера совпадают (2х5 равен 5х2). Прямоугольники одинаковой площади называются *равновеликими* (2х5 и 1х10 равновелики, но не равны).

1. а) Сколько есть разных (не равных друг другу) прямоугольников с периметром 20?
- б) Сколько есть разных прямоугольников с площадью 20?
- в) Каким может быть периметр клетчатого прямоугольника? (Найдите все значения)
- г) Для каких значений периметра P прямоугольник единственный (т. е. все прямоугольники с данным периметром равны друг другу)?
- д) Для каких значений площади S прямоугольник единственный?

Путь к решению. Площадь $S=ab$, периметр $P=2(a+b)$. Удобнее работать с полупериметром $P/2=a+b$.

2. Можно ли квадрат 8х8 без одной угловой клетки (см. рис.) разрезать

- а) на 9 равновеликих прямоугольников?
- б) на 8 равновеликих прямоугольников?
- в) на 7 равновеликих прямоугольников?



Путь к решению. Число клеток – это площадь фигуры. Равновеликие фигуры не обязательно равны! Как связаны площадь целого и сумма площадей частей? Они равны! Подсчеты площадей помогают при разрезании, позволяют использовать делимость и предсказывать возможную форму частей.

- 3.а) Квадрат 6х6 разрезали на 9 равновеликих прямоугольников. Обязательно ли все прямоугольники равны?
- б) А при разрезании на 12 равновеликих прямоугольников?

Путь к решению. Равновеликость в общем случае не означает равенства, но для клетчатых прямоугольников с данной площадью вариантов мало, иногда вариант единственный.

- 4.а) Разрежьте квадрат 6х6 на 10 прямоугольников с равными периметрами.
- б) Чему может быть периметр частей?
- в) Каковы размеры частей и сколько может быть частей каждого размера?

Теорема. Если у двух прямоугольников равны площади и равны периметры, то прямоугольники равны.

Зачётные задачи

Решения присылать не позднее 4 октября. В ПП1 и ПП2 достаточно ответа. В остальных вместе с ответом нужно ещё рассуждение.

ПП1. Разрежьте квадрат 4х4 по границам клеток на нечётное число прямоугольников одинакового периметра.

ПП2. Клетчатый квадрат 6х6 без угловой клетки разрезали на равновеликие не квадратные прямоугольники. Сколько прямоугольников могло получиться? (Найдите все ответы)

ПП3.а) Квадрат 10х10 разрезали на 10 прямоугольников с одинаковыми периметрами. Обязательно ли среди частей есть не равные?

б) А если этот квадрат разрезали на 9 прямоугольников с одинаковыми периметрами?

в) Приведите пример разрезания этого квадрата на 9 прямоугольников с одинаковыми периметрами.

ПП4. а) Можно ли разрезать квадрат 8х8 на 21 прямоугольник одинакового периметра?

б) А на 22 прямоугольника?

ПП5. Квадрат 8×8 разрезан на прямоугольники периметра 10.

а) Обязательно ли все прямоугольники равны?

б) Обязательно ли число прямоугольников двузначно?

ПП6*. Клетчатый прямоугольник 11×35 разрезали по границам клеток на два меньших прямоугольника. Периметр одной части в целое число раз меньше периметра другой. Найдите размеры большего из прямоугольников.

ПП7*. Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать по границам клеток на пять прямоугольников так, чтобы ни из каких двух частей нельзя было сложить прямоугольник?

Онлайн-кружок 6 класса, 19 сентября 2025 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Mmoln/2025-26/index.html>