

РАССТАВЬ ЦИФРЫ

Задачи на расстановку цифр в клетки, вершины или числители и знаменатели дробей – это почти ребусы. Как и в ребусах, при переборе работают ограничения в виде неравенств. Но тут больше математики, связанной с делимостью.

Доказав делимость, сведём задачу к перебору делителей.

1. Имеется 9 карточек с цифрами 1,..., 9. Из части карточек Ева сложила два числа с суммой 100, при этом одно число делится на другое. Какую цифру Ева точно использовала?

Цифры – числа небольшие, неравенства помогают найти узкие места и заметно сократить перебор.

2. Найдите 4 цифры такие, что сумма двух чётных вдвое больше суммы двух нечётных, а сумма двух кратных 3 втрое больше суммы двух не кратных 3.

Лемма. Обозначим $s(x)$ – сумму цифр числа x . Если $N = a+b+c+\dots$, то $s(N) = s(a)+s(b)+s(c)+\dots - 9k$, где k – число единиц, перенесённых в старшие разряды.

Следствие. $s(N)$ и $s(a)+s(b)+s(c)+\dots$ дают одинаковый остаток при делении на 9.

3. а) Разбейте 111 на два слагаемых с одинаковыми суммами цифр.

б) Всякое ли трёхзначное число можно разбить на два слагаемых с одинаковыми суммами цифр?

В ребусах со сложением и вычитанием несократимых дробей узкое место – делимость знаменателей.

Лемма. Если какой то знаменатель делится на некоторую степень простого числа p^k , то на то же должен делиться ещё хотя бы один знаменатель.

4. Можно ли вместо звёздочек вписать шесть последовательных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным: $*/ * + */ * = */ *$?

Зачётные задачи

РЦ1. Какое наименьшее целое может получиться в результате деления ДЕЛ:И ?

РЦ2. Найдите шестизначное число, у которого первая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё и вторая цифра в 6 раз меньше суммы всех цифр справа от неё.

РЦ3. а) Впишите в каждый кружочек по цифре, отличной от нуля, так, чтобы сумма цифр в двух верхних кружочках была в 7 раз меньше суммы остальных цифр, а сумма цифр в двух левых кружочках была в 5 раз меньше суммы остальных цифр.

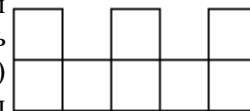


б*) Докажите, что задача имеет единственное решение.

РЦ4. Каждое ли четырёхзначное число меньше 3333 можно представить как сумму двух натуральных слагаемых с одинаковыми суммами цифр?

РЦ5.
$$И + 3 = \frac{Д}{Б} + \frac{Р}{Е} + \frac{О}{Й}$$
 Есть ли решение у ребуса такое, что все цифры не равны 0, все дроби — несократимы, и в обеих частях слагаемые идут по возрастанию?

РЦ6. а) Можно ли так расставить в клетках фигуры числа от 1, 2, ..., 8, чтобы при любом разрезании фигуры на две части сумма в одной из частей делилась на сумму в другой? (Резать можно только по границам клеток.)



б) Можно ли так расставить в клетках полосы 1x8 числа от 1, 2, ..., 8, чтобы при любом разрезании полосы на две части сумма в одной из частей делилась на сумму в другой? (Резать можно только по границам клеток.)

в) Можно ли расставить 8 разных цифр в клетках полосы 1x8 так, чтобы при любом разрезании полосы на две части сумма в одной из частей делилась на сумму в другой?

РЦ7. Какое наибольшее число можно представить в виде суммы 27 слагаемых, где каждое равно какой-нибудь цифре этого числа?

РЦ8. Желая получше изучить цифры, маленький Дания вырвал из книжки несколько листов. На них в номерах страниц каждая из 10 цифр встретилась ровно по одному разу. Сколько листов вырвал Дания? Страницы в книге пронумерованы по порядку, начиная с 1. На каждом листе два номера страниц: с одной стороны нечётный, с другой – больший на 1 чётный.