Разминка на малых

Разминка – это похожая задача, но полегче. Решив легкую, применим найденные идеи и для сложной. Самый простой способ упрощения: изменить какое-то число в условии на меньшее.
Если задача или искомый пример входит в серию подобных ему, разумно сначала посмотреть на самые маленькие примеры в серии. Два-три малых примера подскажут закономерность (например, арифметическую прогрессию ответов), и это поможет разобраться с большими конструкциями. Но не забывайте, что *доказать* закономерность можно только общим рассуждением.

1. Найдите суммы: **а)** 3-2+1; **б)** 5-4+3-2+1; **в)** 7-6+5-4+3-2+1;
г) 55-54+53-...+3-2+1.
д) Робин и Бобин утащили из ресторана 101 конфету: Робин тащил, а Бобин его прикрывал. В комнате Бобин напал на Робина и отнял 100 конфет. Робин напал в ответ и отнял у Бобина 99 конфет. Тогда Бобин отнял у Робина 98 конфет, и т. д. пока один не отнял у другого 1 конфету. Сколько конфет досталось Робину и сколько — Бобину?

2. а) Разрежьте прямоугольник 2х6 по границам клеток на две несимметричные фигуры разной площади.
б) Придумайте 3 несимметричные клетчатые фигуры разной площади такие, чтобы из любых двух можно было сложить прямоугольник.
в) Придумайте 7 несимметричных клетчатых фигур разной площади таких, чтобы из любых двух можно было сложить прямоугольник.

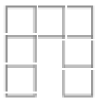
3. а) Найдите такой набор из четырех гирь, чтобы любую массу из 1, 2, 3, …, 15 г можно было уравновесить одной или несколькими гирями.
б) Найдите такой набор из шести гирь, чтобы любую массу из 1, 2, 3, …, 60 г можно было уравновесить одной или несколькими гирями.

4. Граф не двудольный, но если стереть любое из его рёбер, он станет двудольным. Придумайте пример такого графа
а) с 5 рёбрами; **б)** с 15 рёбрами.

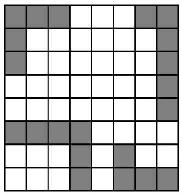
Зачётные задачи

РМ1. Найдите сумму 49-47+45-43+....-3+1

РМ2. Петя складывает из спичек клетчатые буквы П, у которых ширина равна высоте (см. рис). Сторона каждой клетки — одна спичка. Сколько спичек ему понадобится для П шириной и высотой
а) 3; **б)** 4; **в)** 5; **г)** 7; **д)** 20?



РМ3. Назовем *уголком* клетчатую фигуру, составленную из двух прямоугольников толщины 1 *(*см. примеры серых уголков на рисунке*)*.
а) Торт сделан в виде клетчатого квадрата со стороной 5 без угловой клетки. От него можно отрезать уголки с *нечётным* числом клеток и съедать, если кусок такой площади ты ещё не ел. Можно ли в одиночку съесть весь торт?
б) А торт со стороной в 20 клеток без угловой клетки?



РМ4. Есть лист клетчатой бумаги, сторона клеток равна 1. Рисовать можно только по линиям сетки. Нарисуйте **а)** четырёхугольник площади 1; **б)** 12-угольник площади 5; **в)** 20-угольник площади 9; **г)** 100-угольник площади 49.

РМ5. а) Есть 49 монет достоинством в 1, 2, 3, …, 49 динаров. Какое наибольшее число людей могут разделить эти деньги поровну?
б) Есть 50 монет достоинством в 1, 2, 3, …, 50 динаров. Какое наибольшее число людей могут разделить эти деньги поровну?

РМ6. а) Придумайте 3 несимметричные клетчатые фигуры площадьми 4, 5 и 6 так, что из любых двух можно сложить осесимметричную, но не центрально-симметричную фигуру.
б) Придумайте 7 несимметричных клетчатых фигур разной площадьми от 4 до 10 так, что из любых двух можно сложить осесимметричную, но не центрально-симметричную фигуру.

РМ7. а) В ряд записаны 5 натуральных чисел по возрастанию: $a<b<c<d<e$. Могут ли НОДы пар соседей идти по убыванию: НОД(a,b)>НОД(b,c)>НОД(c,d)>НОД(d,e)?
б*) В ряд записаны 10 натуральных чисел по возрастанию. Могут ли НОДы пар соседей идти по убыванию?

РМ8. Есть двухчашечные весы. При взвешивании груза гири можно класть *на одну или на обе чаши* весов.
а) Найдите набор из четырёх гирь, которыми можно уравновесить каждую массу из 1, 2, 3, …, 40 г.
б) Найдите набор из пяти гирь общим весом 100 г, которыми можно уравновесить каждую массу из 1, 2, 3, …, 100 г.