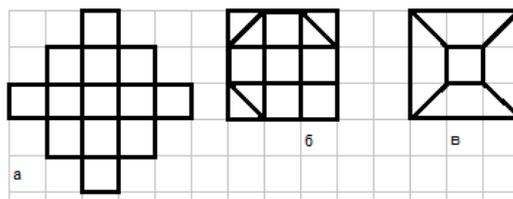


ЭЙЛЕРОВЫ ПУТИ И ЦИКЛЫ

Упр1. Какие из данных фигур можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды?
(Такие фигуры называют *уникурсальными*).

Определение. Путь, проходящий по каждому *ребру* графа ровно один раз, называется *эйлеровым*. Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.



Теорема 1. а) Пусть в графе есть незамкнутый эйлеров путь.

Тогда степени двух концов этого пути нечётны, а степени всех остальных вершин чётны.

б) Пусть в графе есть эйлеров цикл. Тогда степени всех вершин чётны.

Замечание. Формулировка теоремы похожа на лемму о рукопожатиях. Не путайтесь:

А) если вершин нечётной степени нечётное число, то так *не бывает*,

Б) а если вершин нечётной степени чётное число большее 2: бывает, но в таких графах всего лишь *нет эйлерова пути*.

Замечание. Чтобы найти эйлеров путь в графе с двумя нечётными вершинами, мы *обязаны* начать в одной из них, а закончить в другой.

Упр. 2. На листе нарисованы несколько окружностей. Они пересекаются так, что можно от каждой добраться по дугам до каждой другой. Всегда ли можно нарисовать все эти окружности, не отрывая карандаша от бумаги, не проводя никакую линию дважды?

Теорема 2 (критерий эйлеровости). а) Ровно две вершины *связного* графа – нечётной степени \Leftrightarrow в графе есть незамкнутый эйлеров путь.

б) Все вершины *связного* графа – чётной степени \Leftrightarrow в графе есть эйлеров цикл.

Комментарий. На практике эйлеров цикл так и ищут: разбивают все ребра на несколько циклов, а затем шаг за шагом сливают два цикла в один как в решении упр.2, пока не получится один единственный цикл.

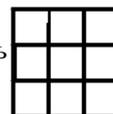
Упр3. Муравей ползает по рёбрам куба, поворачивая только в вершинах.

а) Может ли он проползти по каждому *ребру* ровно один раз?

б) Может ли он побывать в каждой *вершине* ровно один раз?

4. У Саши есть отрезок проволоки длиной 12 дм. Он хочет сделать из неё каркас куба со стороной 1 дм. Для этого ему придётся разрезать проволоку на несколько частей, согнуть их, а затем спаять части. На какое наименьшее число кусков придётся резать?

5. Муравей бегаёт по сторонам сетки 3x3, которая разбивает большой квадрат на квадратики со стороной 1 м. Он должен пробежать по каждой стороне хотя бы один раз. Какой наименьший путь он должен проделать?



Зачётные задачи

ЭП1. а) На окружности отметили 6 точек, каждые две точки соединили отрезком. Уникурсальна ли полученная фигура?

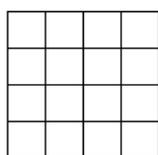
б) На окружности отметили 7 точек, каждые две точки соединили отрезком. Уникурсальна ли полученная фигура?

ЭП2. Поверхность кубика Рубика 3x3x3 см разбита на квадратики 1x1 см.

а) Червяк ползает по сторонам квадратиков, поворачивая только в вершинах. Он может начать из любой точки. Может ли он проползти по каждой *стороне* ровно один раз?

б*) Мошка летает по квадратикам, перелетая каждый раз через сторону в соседний квадратик. Она может начать с любого квадратика и побывать в одном квадратике несколько раз (если надо). Может ли мошка перелететь через каждую сторону ровно по разу?

ЭП3. Жук ползает по рёбрам куба со стороной 1 дм. Он должен проползти по каждому ребру хотя бы один раз (но может и несколько раз, если надо). Какой наименьший путь должен проделать жук?



ЭП4. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратов клетчатого квадрата 4x4 представить в виде объединения

а) восьми ломаных длиной 5; **б)** пяти ломаных длиной 8?

ЭП5. а) Проведите на сетке 4x4 несколько диагоналей клеток так, чтобы получилась уникурсальная фигура.

б*) Какое наименьшее число диагоналей для этого надо нарисовать?