

Увидеть двудольный граф

1. а) Мог ли шахматный конь прийти от левой нижней клетки доски до правой верхней ровно за 7 ходов?
б) Жука посадили в левую нижнюю вершину квадратной сетки 7×7 см. Каждым ходом жук пробегает по линиям сетки расстояние 3 см, нигде не поворачивая назад. За какое наименьшее число ходов он может прийти в правую верхнюю вершину?

Определение. Граф – двудольный, если его вершины *можно раскрасить* в два цвета так, что концы каждого ребра будут разного цвета.

Важный момент. На маршруте по рёбрам двудольного графа цвета вершин строго *чередуются*.

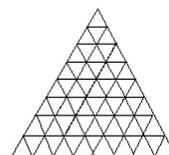
Примеры двудольных графов: а) граф коня на шахматной доске; в) граф куба; г) граф соседства клеток на шахматной доске.

2. а) Можно ли покрасить вершины 20-угольника в два цвета так, чтобы концы каждой стороны были разного цвета? б) А вершины 19-угольника?

Важный момент. В двудольном графе не может быть *нечётного цикла*. Поэтому если в графе есть нечётный цикл (узкое место), то граф НЕ двудольный. А вот графы чётных циклов и деревьев – двудольны.

Раскрасить в два цвета *правильно* (то есть так, чтобы объекты одинакового цвета не соприкасались или не были связаны ребром) легче, если есть свойство, которое отличает одни объекты от других. Если присутствуют числа, таким свойством может быть *чётность*.

3. а) Большой треугольник разрезан на одинаковые треугольнички (см. рис.). Раскрасьте их в два цвета так, чтобы треугольнички одинакового цвета не соприкасались сторонами. Какое свойство отличает чёрные треугольнички от белых?



- б) Раскрасьте числа от 1 до 10 в два цвета так, чтобы никакое число не было больше на 3 или на 5 больше другого одноцветного. Какое свойство чисел отличает белые числа от чёрных?
в) Раскрасьте числа от 1 до 10 в два цвета так, чтобы никакое число не было в простое число раз больше одноцветного с ним. Какое свойство чисел отличает белые числа от чёрных?

Зачётные задачи

УД1. Нарисуйте двудольный граф с 6 вершинами и 9 рёбрами (рёбра могут пересекаться).

УД2. а) На некоторых клетках клетчатой доски стоят кони. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы кони одинакового цвета друг друга не били.

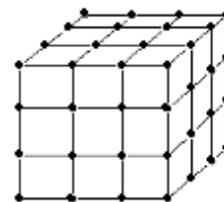
б) На некоторых *белых* клетках клетчатой доски стоят короли. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы короли одинакового цвета друг друга не били.

УД3. Клетчатая сетка разбивает бумагу на квадратные клетки 1×1 . По линиям сетки нарисован многоугольник. Может ли его периметр быть нечётным?

УД4. За какое наименьшее число ходов шахматный конь может прийти из одного угла доски 20×20 в противоположный угол?

УД5. Дан кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$.

а) *Вершины* клеток на поверхности кубика объявили вершинами графа, а стороны клеток объявили ребрами графа (см. рис). Двудольен ли полученный граф? Сколько в нём вершин и ребер?



б) *Клетки* на поверхности кубика объявили вершинами графа, а если у двух клеток есть общая сторона, они связаны ребром. Двудольен ли полученный граф? Сколько в нём вершин и ребер?