

## НОД и НОК

Напомним, что НОД двух или нескольких целых чисел – это *наибольший общий делитель*, то есть наибольшее число, которое делит каждое из данных целых. НОК – это *наименьшее общее кратное*, то есть наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных целых чисел. Если НОД чисел равен 1, то числа называются *взаимно простыми* (у них нет общих простых делителей в разложении).

1. Найдите а) НОК(33, 44); б) НОД(2022, 2023); в) НОК (19, 20); г) НОД(888, 1000); д) НОД(91, 169, 1001); е) НОК(10, 24, 75); ж) НОД(2002, 2024); з) НОД (1000, 2025).

**Свойства.** а) Если два числа взаимно-просты (например, соседние), то их НОД=1, НОК=их произведению.

б) Если  $b$  делится на  $a$ , то НОД( $a, b$ ) =  $a$ , НОК( $a, b$ ) =  $b$ .

в) Пусть  $b > a$ . Тогда НОД( $a, b$ ) = НОД( $a, b-a$ ).

**Формула.** Используя разложения на простые множители:

$$\text{НОД}(p^k q^m, p^{k'} q^{m'}) = p^{\min(k, k')} q^{\min(m, m')}, \text{НОК}(p^k q^m, p^{k'} q^{m'}) = p^{\max(k, k')} q^{\max(m, m')}.$$

Аналогично для трёх чисел и разложения на 3 множителя:

$$\text{НОК}(10, 24, 75) = \text{НОК}(2 \cdot 5, 2^3 \cdot 3, 3 \cdot 5^2) = \text{НОК}(2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1, 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0, 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2) = 2^{\max(1, 3, 0)} \cdot 3^{\max(0, 1, 1)} \cdot 5^{\max(1, 0, 2)} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600.$$

**Теорема.** а) НОД делится на любой общий делитель этих чисел;

б) Любое общее кратное делится на НОК.

2. а) Натуральные числа  $a$  и  $b$  друг на друга не делятся, при этом их НОД=50, а НОК=1000. Найдите эти числа.

б) Натуральные числа  $x, y, z$  таковы, что  $x \cdot y = 77, y \cdot z = 35$ . Найдите НОК( $x, y, z$ ).

3. Три целых числа взаимно просты. Обязательно ли какие-то два из них тоже взаимно просты?

4. а) На сколько нулей заканчивается  $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10$ ?

б) А  $30!$  ?

### Зачётные задачи

**НО1.** Найдите самое большое трехзначное число, взаимно простое с 300.

**НО2.** Жители планеты Ялмез, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 85 минут, а в часе 119 секунд. Сколько секунд в сутках планеты Ялмез?

**НО3.** Саша задумал однозначное число  $s$ . Даша может назвать свое число  $d$  и спросить, чему равен НОД( $d, s$ ). При каком наименьшем  $d$  Даша сможет по ответу наверняка узнать  $s$ ?

**НО4.** Имеется много одинаковых прямоугольных картонок размером  $a \times b$  см, где  $a$  и  $b$  – целые числа, причем  $a$  меньше  $b$ . Известно, что из таких картонок можно сложить и прямоугольник  $49 \times 51$  см, и прямоугольник  $99 \times 101$  см. Найдите  $a$  и  $b$ ?

**НО5.** У скольких пятизначных чисел сумма цифр или произведение цифр равно 44?

**НО6.** Сумма нескольких натуральных чисел равна 1000, все цифры в их записи различны (нет одинаковых цифр даже в разных числах). Каков наибольший возможный НОД этих чисел?

**НО7\*.** На складе металлоизделий лежат по 20 четунов, пятунов и тритунов. Четун состоит из четырёх чаек, пятун – из пяти паек, тритун – из трёх таек. Все чайки одинаковы, пайки – тоже, одинаковы и все тайки. У Димы есть чашечные весы без гирь, и он хочет за одно взвешивание узнать, что тяжелее: две чайки или пайка с тайкой. К сожалению, все изделия, имеющиеся на складе – неразборные. Помогите Диме!

**НО8\*.** Два трёхзначных числа отличаются на 1. Может ли их произведение оканчиваться на три нуля?