

Перебор делителей (полный вариант)

Когда нужны все делители числа, их ищут с помощью разложения числа на простые множители.

1. Произведение трёх натуральных чисел равно 77, а сумма – меньше. Найдите сумму.
2. Сколько различных делителей у числа а) 45; б) 200. Как выписать их все?

Комментарий. Любое число, у которого ровно два различных простых делителя p и q , представляется как $p^m \cdot q^n$. Любой его делитель имеет вид $p^i \cdot q^j$, где $i \leq m$ и $j \leq n$. Тогда все делители можно свести в таблицу, где столбцы пронумерованы степенями p , а строки – степенями q . Видим, что у такого числа $(m+1)(n+1)$ делителей. Аналогично комбинируя три разных степени, видим, что у числа $p^m \cdot q^n \cdot r^l$ есть $(m+1)(n+1)(l+1)$ делителей, и т. п.

Разбиение делителей на пары делают так, чтобы либо в каждой паре было одинаковое произведение, либо – одинаковое частное.

3. а) Разбейте все делители числа 88 на пары так, чтобы частные во всех парах были одинаковы.
б) Разбейте все делители числа 90 на пары так, чтобы произведения во всех парах были одинаковы.
в) Найдите произведение всех делителей числа 1000.

Комментарий. а) В таблице это будет разбиение клеток на параллельные доминошки.

- б) Когда делителей чётное число (а это будет всегда, если число *не точный квадрат*), выстраиваем делители по порядку и объединяем первый с последним, второй – с предпоследним и т. д.
в) Если у числа N ровно k делителей, то произведение всех делителей равно $N^{k/2}$.

Перебор по делителям: выяснив, что искомое число – делитель известного числа, проверьте все делители известного – их обычно не так много.

4. Найдите все решения ребуса $** \cdot ** = 210$.
5. Найдите самое маленькое число, у которого ровно 7 делителей.

Зачётные задачи

Де1. Найдите сумму всех делителей числа 28.

Де2. Сколько различных делителей у числа а) 2025; б) 25250?

Де3. Найдите самое маленькое число, у которого ровно 8 делителей.

Де4. Существует ли двузначное число, у которого ровно 12 различных делителей?

Де5. Диана выписала все делители числа 10000 по разу, объединив некоторые из них в группы по 4 штуки так, что произведения во всех группах равны. Каково *наибольшее* число групп?

Де6*. На 100 карточках, лежащих в ряд, слева направо записаны по порядку номера 1, 2, ..., 100. Сначала все карточки лежат номером вниз. В первую минуту перевернули каждую карточку. Во вторую – каждую вторую (считая слева). В третью минуту – каждую третью (считая слева). В 4-ю минуту – каждую четвёртую и т.д. до 100-й минуты включительно. Сколько карточек в итоге лежат номером вверх? Какие у них номера?

Де7*. Клетчатый квадрат 20×20 разрезали по границам клеток на 20 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили квадрат 10×10 . Найдите размеры отложенного прямоугольника.