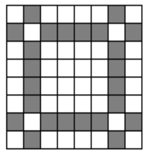
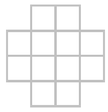
Раскраска в два цвета, чередование

Раскраска в два цвета позволяет выявить *узкие места* и подсчитать, сколько их.



1. Клетки доски 8×8 раскрашены в два цвета (см. рис.). Доску разрезали на домино. Каково наибольшее число двуцветных домино?

Часто используется *шахматная раскраска*. Так раскрасить можно не только клетки, но и вершины. Если раскраски нет, можно раскрасить самим, выбрав подходящую раскраску.



2. а) Какое наибольшее число сторон клеток можно закрасить в квадрате 4x4 без угловых клеток (см. рис.) так, чтобы закрашенные отрезки не соприкасались концами?
б) Какое наибольшее число диагоналей клеток можно закрасить в квадрате 4x4 так, чтобы закрашенные отрезки не пересекались и не соприкасались концами?

Если делаются ходы, то *правильная раскраска* – это такая, когда цвет поля *чередуется* при каждом ходе. Тогда после чётных ходов цвет один, после нечётных – другой. В частности, при шахматной раскраске чередуют цвет ходы коня и хромой ладьи, а при полосатой – хромого слона.
Чередование позволяет найти чётность числа ходов на маршруте и доказывать невозможность некоторых маршрутов.

3. а) Конь прошел от левой нижней клетки до правой верхней. Докажите, что число ходов чётно.
б) *Хромой слон* сдвигается за ход на одну клетку по диагонали. Он прошел от левой нижней клетки до правой верхней. Докажите, что число ходов нечётно.
в) Длина ребра куба равна целому число сантиметров. Муравей бегает по ребрам куба, нигде не поворачивая назад. Стартовав из вершины А, он через некоторое время в неё вернулся. Докажите, что его путь равен четному числу сантиметров.

4. Лемма. Пусть на пути чередуются черные и белые клетки (или вершины), не повторяясь.
а) Если путь не замкнут, и концы – разного цвета, то на пути чёрных и белых клеток поровну.
б) Если путь не замкнут, и концы – одинакового цвета, то клеток этого цвета на 1 больше, чем другого.
в) Если путь – замкнут, то клеток каждого цвета – поровну, а число шагов – чётно.

Зачётные задачи

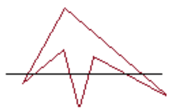
РЧ1. Дана доска в виде клетчатого квадрата 8×8 без двух угловых клеток: левой нижней и правой верхней.
а) Можно ли эту доску разрезать на домино 2×1?
б) На какое наибольшее число прямоугольников можно разрезать эту доску по границам клеток так, чтобы никакая часть не была квадратом?

РЧ2. Сделав 25 ходов, шахматный король вернулся на то поле, откуда стартовал. Докажите, что король сделал хотя бы один ход по диагонали.

РЧ3. *Хромая ладья* ходит по вертикали и горизонтали на одну клетку. Пусть А – левая нижняя, а Б – правая верхняя клетки доски 8x8.
а) Может ли хромая ладья пройти из А в Б, побывав в каждой клетке доски *ровно один раз*?
б) Хромая ладья прошла из А в Б, побывав в каждой клетке доски. Каково наименьшее возможное число ходов?

РЧ4. а) Раскрасьте клетки доски 6×6 в черный и белый цвета так, чтобы всего белых и черных было не поровну, а в каждом прямоугольнике 1×4 – поровну.
б*) Можно ли разрезать клетчатую доску 10×10 на прямоугольники 1×4?

РЧ5. Прямая пересекает 5 пятиугольников, но не проходит ни через одну из их вершин. Каково наибольшее число точек пересечения? (На рисунке пример с 6 точками пересечения для шестиугольника).



РЧ6. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок – на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

РЧ7*. Поверхность кубика Рубика 2×2×2 разбита на единичные квадратные клетки. Какое наибольшее число сторон этих клеток можно закрасить так, чтобы покрашенные отрезки не соприкасались концами?