Графы: связность, циклы, цепочки

1. В деревне Кефировке 9 дворов. Известно, что у Петра соседи Иван и Артём, Ярослав сосед Ивану и Савве, Фёдор – Данилу и Гоше, а также соседствуют Егор с Гошей, Иван с Саввой, Егор с Данилом, Савва с Артёмом и больше соседей в Кефировке нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Пётр дворами пробраться к Гоше за яблоками?

Определение Граф *связный*, если от любой его вершины можно пройти по ребрам до всех других вершин. Всякий несвязный граф распадается на связные куски, называемые *компонентами связности, а* связный граф состоит из одной компоненты.

2. Восемь клеток пронумерованы числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, на каждой стоит по фишке. За один ход разрешается менять местами две фишки на клетках, чья сумма номеров – точный квадрат.

а) На какие клетки может попасть фишка с клетки 2? А с клетки 1?

б) Можно ли за несколько ходов поменять местами фишки с клеток 1 и 6?

в) Верно ли, что любые две фишки можно поменять местами?

Определение. Граф n-угольника (вершины – вершины, стороны – рёбра) называется *циклом* и обозначается C_n. Граф вида **0 – 0 – … – 0 – 0** называется *цепь.*
Минимальная цепь **0 – 0** состоит из ребра и его концов, минимальный цикл – треугольник.
Примеры из задач: Компонента ГФДЕ – это C_4., а граф из задачи 2 распадается на две цепи длин 6 и 2.

Теорема (о степенях 1 и 2).
А. Если в (конечном) графе все вершины – степени 2, то его компоненты связности – циклы.
Б. Если в (конечном) графе степени всех вершин равны 1 или 2, то его компоненты связности – циклы и цепи.

3. В графе есть 6 вершин степени 1 и есть 6 вершин степени 2, а других вершин нет.
а) Нарисуйте пример такого графа.
б) Сколько из компонент связности такого графа – цепи?

Есть много способов доказать, что граф будет связным, даже не рисуя этот граф.
Например, рассмотреть каждую компоненту связности как отдельный граф.
4. а) В графе вершины А и Б степени 1, а все остальные вершины от В до Ж – степени 2. Докажите, что можно пройти по рёбрам от А до Б.
б) В графе вершина А степени 3, вершина Я– степени 21, а все остальные вершины от Б до Ю – степеней 10 и 20. Докажите, что можно пройти по рёбрам от А до Я.

Теорема (о двух нечётных вершинах). Если в конечном графе есть *ровно две вершины нечётной степени*, то они лежат в одной компоненте связности.
Доказательство. Каждую компоненту связности можно считать отдельным графом. При этом степени вершин не меняются. По лемме о рукопожатиях в любой компоненте чётное число вершин нечётной степени, то есть их ноль или две. Значит, обе вершины нечётной степени лежат в одной компоненте.

Для самостоятельного решения

ЦЦ1. Сколько компонент связности у графа коня на шахматной доске 3х3?

ЦЦ2. В графе две вершины степени 0, две вершины степени 1 и две вершины степени 2, а других вершин нет. Сколько в нём компонент связности?

ЦЦ3. В графе 12 вершин, все они степени 2. Какое наибольшее число компонент связности может быть в этом графе?

ЦЦ4. а) По кругу растут 12 кувшинок. Лягушка может прыгать через 3 пустые кувшинки на

4-ю. Считаем кувшинки вершинами графа, а прыжки – ребрами. Сколько компонент связности в этом графе?
б) А если кувшинок 9?
в) А если кувшинок 10?

ЦЦ5. В каждой компоненте связности графа с 11 вершинами есть хотя бы одно ребро. Каково наибольшее число компонент?

ЦЦ6*. В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Требуется организовать дежурства по двое друзей так, чтобы никто не дежурил дважды.
а) Всегда ли можно организовать 11 таких дежурств?
б) Докажите, что как бы ни были устроены дружбы, можно организовать не менее 10 таких дежурств.