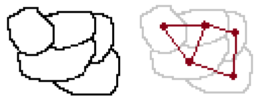
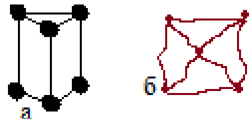
Графы: карты и свойства степеней вершин



Граф карты: вершины – страны, ребра – пары стран-соседей (то есть, с общим участком границы). По карте легко нарисовать привычный рисунок графа: отметим столицы стран как вершины, а столицы соседних стран соединим дорогой (см. рис.). Тогда степень вершины – это число соседей у страны.



1. а) Придумайте карту, граф которой изображен на рисунке (а).
б) Квадратный остров разделён на прямоугольные страны. На ночном снимке видны только столицы и соединяющие их главные дороги (рис. (б)). Восстановите карту.

2. На континенте 9 стран. Может ли у 2 стран быть в ровно по 2 соседа, у 3 стран – ровно по 3 соседа и у 4 стран – ровно по 4 соседа?

> **Лемма о рукопожатиях.** В графе число вершин нечётной степени – чётно.
> **Доказательство**. Сумма степеней чётна, так как равна удвоенному числу рёбер. Значит, в этой сумме чётное число нечётных слагаемых.

3. Можно ли расположить на столе 7 монет так, чтобы каждая касалась ровно трех других?

4. В графе 6 вершин, возле каждой написана её степень. Каково наибольшее количество различных чисел среди написанных?

> **Лемма о повторении степеней.** В любом (конечном) графе найдутся две вершины одинаковой степени.
> **Доказательство.** Если в графе N вершин, то возможны N значений степени от 0 до N-1. Однако степени N-1 и 0 не могут встретиться одновременно: вершина степени N-1 соединена со всеми другими, и тогда степени всех вершин больше 0. Значит, разных степеней не более N-1, и по принципу Дирихле какая-то степень повторится.

5. На столе лежат 5 монет. Все золотые монеты касаются разного числа монет. Каково наибольшее число золотых?

Для самостоятельного решения

ГС1. На столе лежат 5 монет, их размеры не обязательно одинаковы. Каждая золотая монета касается ровно трёх других монет (она может касаться и не золотых). Каково наибольшее число золотых?

ГС2. В графе 5 вершин, степень каждой – не больше 3. Какое наибольшее число рёбер в таком графе?

ГС3. На шахматной доске стоит несколько ладей белого и чёрного цвета. Все белые бьют разное число ладей. Каково наибольшее число белых? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или на одной вертикали и между ними нет других ладей.)

ГС4. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой другой ровно по разу (такой турнир называется *однокруговым*).
а) Могут ли все команды сыграть вничью разное число матчей?
б) Могут ли все команды одержать разное число побед?

ГС5. В графе с 9 вершинами каждые две вершины соединены ребром. Каждое ребро покрашено в какой-нибудь цвет так, что нет рёбер одинакового цвета, выходящих из одной вершины.
а) Может ли быть использовано ровно 8 цветов?
б) Может ли быть использовано ровно 9 цветов?

ГС6. а) Можно ли разбить квадрат на 7 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?
б) Можно ли разбить квадрат не больше чем на 8 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?

Онлайн-кружок 6 класса, 23 ноября 2024 г, http://www.ashap.info/Uroki/Mmoln/2024-25/index.html