

Графы: рисуем и считаем

Определение 1. Скажем, что задан *граф*, если задано множество его *вершин* и про любую пару вершин сказано, *связаны* они *ребром* или нет (будем рассматривать только пары из двух различных вершин). Если две вершины соединены, то только одним ребром.

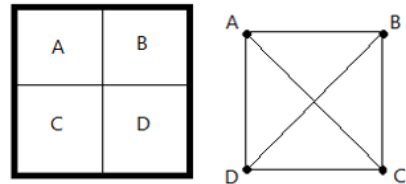
Примеры. а) Граф знакомств: вершины – школьники, ребра – знакомства.

б) города и дороги;

в) граф короля (коня, ладьи, ферзя...): вершины – клетки, ребра – пары клеток, связанных ходом короля (коня, ладьи, ферзя...).

Один и тот же граф можно нарисовать по-разному.

Пример. См. рис. графа короля на доске 2x2:



1. а) Нарисуйте граф короля на доске 2x2 по-другому так, чтобы ребра не пересекались.

б) Вершины и ребра графа – это вершины и ребра куба. Сколько всего рёбер и сколько вершин? Нарисуйте этот граф, стараясь сделать как можно меньше пересечений рёбер.

в) Какое наименьшее число пересечений рёбер может быть на рисунке графа куба?

Определение 2. *Степень* вершины – это число выходящих из неё рёбер.

2. Нарисуйте граф с 4 вершинами так, чтобы в нём нашлись три вершины разной степени. Какая степень встречается дважды?

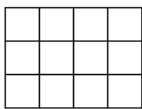
3. Посчитайте во всех нарисованных графах сумму степеней всех вершин и число рёбер. Как связаны между собой эти числа? Сформулируйте теорему о сумме степеней вершин и докажите её.

4. Дан граф короля на шахматной доске 4x4.

а) Какие степени вершин встречаются в этом графе?

б) Сколько рёбер в этом графе?

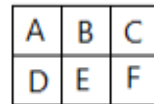
Зачётные задачи



РГ1. Граф нарисован как клетчатый прямоугольник 3x4 (см. рис). Вершины графа – это вершины клеток, ребра графа – стороны клеток. Сколько в этом графе вершин нечётной степени?

РГ2. Вершины графа – клетки доски 2x3, ребра – ходы ладьи (не забудьте, что ладья прыгает по горизонтали и вертикали на любое расстояние).

а) Нарисуйте этот граф, обозначив вершины буквами как на доске.



б) Сколько в этом графе вершин и рёбер?

в) Можно ли нарисовать этот граф так, чтобы ребра не пересекались?

РГ3. а) Какое наибольшее число рёбер может быть в графе с 5 вершинами?

б) Нарисуйте такой граф (постарайтесь сделать как можно меньше пересечений рёбер).

РГ4. Во дворе живут 5 пёсиков: Шарик, Гарик, Карик, Царик и Чинарик. Каждому из них случалось драться с кем-нибудь из остальных, причем у Шарика, Гарика, Карика и Царика число тех, с кем они дрались – разное. Со сколькими собаками двора дрался Чинарик?

РГ5* а) В 13-угольнике провели 30 диагоналей, при этом из 3 вершин выходит по 3 диагонали, из 4 вершин – по 4 диагонали, из 5 вершин – по 5 диагоналей. Сколько диагоналей проведено из последней вершины? (*Диагональ* – это отрезок с концами в несоседних вершинах многоугольника)

б) На космической станции несколько помещений. Если у двух помещений есть общая стена, то между ними есть люк (для экономии люк один, даже если общих стен несколько). Известно, что в каждом помещении 6 люков, а всего на станции 36 люков. Сколько помещений на станции?