Разбор задач на графы

Если делаются ходы, то *правильная раскраска* заставляет *чередовать* цвет поля при каждом ходе. Тогда после чётных ходов цвет один, после нечётных – другой. В частности, при шахматной раскраске чередуют цвет ходы коня и хромой ладьи.
Чередование позволяет найти чётность числа ходов на маршруте и доказывать невозможность некоторых маршрутов.

РЧ2. а) Раскрасьте клетки доски 6×6 в черный и белый цвета так, чтобы всего белых и черных было не поровну, а в каждом прямоугольнике 1×4 – поровну.

б*) Можно ли разрезать клетчатую доску 10×10 на прямоугольники 1×4?
РЧ3. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок – на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?
РЧ4'. а) Может ли прямая пересечь все три стороны треугольника, но не пройти ни через одну из его вершин?
б) Прямая не проходит ни через одну из вершин семиугольника. Точки пересечения прямой с границами семиугольника вырезают на прямой несколько отрезков. Те отрезки, которые внутри семиугольника, покрасим в чёрный цвет. Какое наибольшее число черных отрезков?

Важный момент. В двудольном графе не может быть *нечётного цикла.* Поэтому если в графе есть нечётный цикл (узкое место), то граф НЕ двудольный. А вот графы чётных циклов и деревьев – двудольны.

Раскрасить в два цвета *правильно* (то есть так, чтобы объекты одинакового цвета не соприкасались или не были связаны ребром) легче, если есть свойство, которое отличает одни объекты от других. Если присутствуют числа, таким свойством может быть *чётность*.

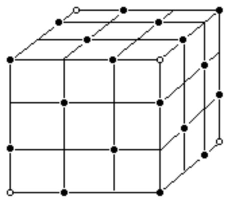
УД3. Клетчатая сетка разбивает бумагу на квадратные клетки 1x1. По линиям сетки нарисован многоугольник. Может ли его периметр быть нечётным?

УД4. За какое наименьшее число ходов шахматный конь может дойти из одного угла доски 20x20 в противоположный угол?

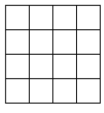
Определение. Путь, проходящий по каждому *ребру* графа ровно один раз, называется *эйлеровым*. Замкнутый эйлеров путь называется *эйлеровым циклом*.
Замечание. Чтобы найти эйлеров путь в графе с двумя нечётными вершинами, мы *обязаны* начать в одной из них, а закончить в другой.
Теорема 2 (критерий эйлеровости). а) Ровно две вершины *связного* графа – нечётной степени <=> в графе есть незамкнутый эйлеров путь.
б) Все вершины *связного* графа – чётной степени <=> в графе есть эйлеров цикл.

ЭП1. а) На окружности отметили 6 точек, каждые две точки соединили отрезком. Уникурсальна ли полученная фигура?
б) На окружности отметили 7 точек, каждые две точки соединили отрезком. Уникурсальна ли полученная фигура?

ЭП2. Поверхность кубика Рубика 3x3x3 см разбита на квадратики 1x1 см.
а) Червяк ползает по сторонам квадратиков, поворачивая только в вершинах. Он может начать из любой точки. Может ли он проползти по каждой *стороне* ровно один раз?
б*) Мошка летает по квадратикам, перелетая каждый раз через сторону в соседний квадратик. Она может начать с любого квадратика и побывать в одном квадратике несколько раз (если надо). Может ли мошка перелететь через каждую сторону ровно по разу?



ЭП3. Жук ползает по рёбрам куба со стороной 1 дм. Он должен проползти по каждому ребру хотя бы один раз (но может и несколько раз, если надо). Какой наименьший путь должен проделать жук?



ЭП4. Можно ли сетку, состоящую из границ единичных квадратиков клетчатого квадрата 4×4 представить в виде объединения
а) восьми ломаных длиной 5; **б)** пяти ломаных длиной 8?

Для самостоятельного решения

РЧ4. Прямая пересекает 5 пятиугольников, но не проходит ни через одну из их вершин. Каково наибольшее число точек пересечения? (На рисунке пример с 6 точками пересечения для шестиугольника).