

НОД и НОК

Напомним, что НОД двух или нескольких целых чисел – это *наибольший общий делитель*, то есть наибольшее число, которое делит каждое из данных целых. НОК – это *наименьшее общее кратное*, то есть наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных целых чисел. Если НОД чисел равен 1, то числа называются *взаимно простыми* (у них нет общих простых делителей в разложении).

1. Найдите а) НОК(33, 44); б) НОД(2022, 2023); в) НОК (19, 20); г) НОД(888, 1000); д) НОД(91, 169, 1001); е) НОК(10, 24, 75).

Свойства. а) Если два числа взаимно-просты (например, соседние), то их НОД=1, НОК=их произведению.

б). Пусть $b > a$. Тогда $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b-a)$.

Формула. Используя разложения на простые множители:

$$\text{НОД}(p^k q^m, p^{k'} q^{m'}) = p^{\min(k, k')} q^{\min(m, m')}, \quad \text{НОК}(p^k q^m, p^{k'} q^{m'}) = p^{\max(k, k')} q^{\max(m, m')}.$$

Аналогично для трёх чисел и разложения на 3 множителя:

$$\text{НОК}(10, 24, 75) = \text{НОК}(2 \cdot 5, 2^3 \cdot 3, 3 \cdot 5^2) = \text{НОК}(2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1, 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0, 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2) = 2^{\max(1, 3, 0)} \cdot 3^{\max(0, 1, 1)} \cdot 5^{\max(1, 0, 2)} = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600.$$

Теорема. а) НОД делится на любой общий делитель этих чисел;

б) Любое общее кратное делится на НОК.

2. Натуральные числа a и b друг на друга не делятся, при этом их НОД=50, а НОК=1000. Найдите эти числа.

3. Три числа взаимно просты. Обязательно ли какие-то два из них тоже взаимно просты?

4. а) На сколько нулей заканчивается $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10$?

б) А $30!$?

Зачётные задачи

НО1. Найдите самое большое трехзначное число, взаимно простое с 300.

НО2. Жители планеты Ялмез, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 85 минут, а в часе 119 секунд. Сколько секунд в сутках планеты Ялмез?

НО3. Саша задумал однозначное число. Маша может назвать свое число и спросить, чему равен наибольший общий делитель двух этих чисел. Какое наименьшее число она должна назвать, чтобы по ответу наверняка узнать Сашино число?

НО4. Имеется много одинаковых прямоугольных картонок размером $a \times b$ см, где a и b – целые числа, причем a меньше b . Известно, что из таких картонок можно сложить и прямоугольник 49×51 см, и прямоугольник 99×101 см. Найдите a и b ?

НО5. У скольких пятизначных чисел сумма цифр или произведение цифр равно 44?

НО6. Сумма нескольких натуральных чисел равна 1000, все цифры в их записи различны (нет одинаковых цифр даже в разных числах). Каков наибольший возможный НОД этих чисел?

НО7. На складе металлоизделий лежат по 20 четунов, пятунов и тритунов. Четун состоит из четырёх чаек, пятун – из пяти паек, тритун – из трёх таек. Все чайки одинаковы, пайки – тоже, одинаковы и все тайки. У Димы есть чашечные весы без гирь, и он хочет за одно взвешивание узнать, что тяжелее: две чайки или пайка с тайкой. К сожалению, все изделия, имеющиеся на складе – неразборные. Помогите Диме!