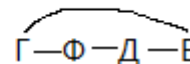
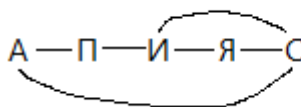


Графы: связность, циклы, цепочки

1. В деревне Кефировке 9 дворов. Известно, что у Петра соседи Иван и Артём, Ярослав сосед Ивану и Савве, Фёдор – Данилу и Гоше, а также соседствуют Егор с Гошей, Иван с Саввой, Егор с Данилом, Савва с Артёмом и больше соседей в Кефировке нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Пётр дворами пробраться к Гоше за яблоками?

Определение Граф *связный*, если от любой его вершины можно пройти по ребрам до всех других вершин. Всякий несвязный граф распадается на связные куски, называемые *компонентами связности*, а связный граф состоит из одной компоненты.



2. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по сторонам пятиугольника свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

Определение. Граф n -угольника (вершины – вершины, стороны – рёбра) называется *циклом* и обозначается C_n . Граф вида $0 - 0 - \dots - 0 - 0$ называется *цепь*.

Примеры из задач: Компонента ГФДЕ – это C_4 , а граф с фишками – C_5 . Минимальная цепь $0 - 0$ состоит из ребра и его концов.

Теорема (о степенях 1 и 2).

А. Если в (конечном) графе все вершины – степени 2, то его компоненты связности – циклы.

Б. Если в (конечном) графе степени всех вершин равны 1 или 2, то его компоненты связности – циклы и цепи.

3. В графе есть 6 вершин степени 1 и есть 6 вершин степени 2, а других вершин нет.

а) Нарисуйте пример такого графа.

б) Сколько из компонент связности такого графа – цепи?

Бывает полезно рассмотреть ту или иную компоненту связности как отдельный граф.

4. **а)** В графе вершины А и Б степени 1, а все остальные вершины от В до Ж – степени 2. Докажите, что можно пройти по рёбрам от А до Б.

б) В графе вершина А степени 3, вершина Я – степени 21, а все остальные вершины от Б до Ю – степеней 10 и 20. Докажите, что можно пройти по рёбрам от А до Я.

Задачи на ответ и пример

5. Сколько компонент связности у графа коня на шахматной доске 3×3 ?

6. В графе две вершины степени 0, две вершины степени 1 и две вершины степени 2, а других вершин нет. Сколько в нём компонент связности?

7. В графе 12 вершин, все они степени 2. Какое наибольшее число компонент связности может быть в этом графе?

Зачётные задачи

ЦЦ1. Связен ли граф коня на доске 4×4 ?

ЦЦ2. а) По кругу растут 12 кувшинок. Лягушка может прыгать через 3 пустые кувшинки на 4-ю. Считаем кувшинки вершинами графа, а прыжки – ребрами. Сколько компонент связности в этом графе?

б) А если кувшинок 9?

в) А если кувшинок 10?

ЦЦ3. В каждой компоненте связности графа с 11 вершинами есть хотя бы одно ребро. Каково наибольшее число компонент?

ЦЦ4. а) В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды.

б) Всегда ли можно организовать 11 дежурств?