

## Графы: свойства степеней вершин

**Определение.** *Степень* вершины в графе – это число выходящих из неё рёбер.

1. В классе учатся 9 человек. Может ли у 2 учеников быть в классе ровно по 2 друга, у 3 учеников – ровно по 3 друга и у 4 учеников – ровно по 4 друга?
2. Можно ли расположить на столе 7 монет так, чтобы каждая касалась ровно трёх других?

**Лемма о рукопожатиях.** В графе число вершин нечётной степени – чётно.

3. В графе 6 вершин, возле каждой написана её степень. Каково наибольшее количество различных чисел среди написанных?

**Лемма о повторении степеней.** В любом (конечном) графе найдутся две вершины одинаковой степени.

4. На столе лежат 5 монет. Все золотые монеты касаются разного числа монет. Каково наибольшее число золотых?

### Задачи на ответ и пример

5. На столе лежат 5 монет, их размеры не обязательно одинаковы. Каждая золотая монета касается ровно трёх других монет (она может касаться и не золотых). Каково наибольшее число золотых?
6. В графе 5 вершин, степень каждой – не больше 3. Какое наибольшее число рёбер в таком графе?
7. На доске нарисованы 5 отрезков, не продолжающих друг друга. Точки пересечения отрезков отмечены. Для каждого отрезка записали, сколько отрезков он пересекает. Какое наибольшее число написанных чисел могут быть различными?

### Зачётные задачи

**ГС1.** На шахматной доске стоит несколько ладей белого и чёрного цвета. Все белые бьют разное число ладей. Каково наибольшее число белых? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или на одной вертикали и между ними нет других ладей.)

**ГС2.** В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой другой ровно по разу (такой турнир называется *однокруговым*).

- а) Могут ли все команды сыграть вничью разное число матчей?
- б) Могут ли все команды одержать разное число побед?

**ГС3.** В графе с 9 вершинами каждые две вершины соединены ребром. Каждое ребро покрашено в какой-нибудь цвет так, что нет рёбер одинакового цвета, выходящих из одной вершины.

- а) Может ли быть использовано ровно 8 цветов?
- б) Может ли быть использовано ровно 9 цветов?

**ГС4. а)** Можно ли разбить квадрат на 12 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?

**б)** Можно ли разбить квадрат на 13 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?