

Графы: свойства степеней вершин

Определение. *Степень* вершины в графе – это число выходящих из неё рёбер.

1. В классе учатся 9 человек. Может ли у 2 учеников быть в классе ровно по 2 друга, у 3 учеников – ровно по 3 друга и у 4 учеников – ровно по 4 друга?
2. Можно ли расположить на столе 7 монет так, чтобы каждая касалась ровно трёх других?
3. В графе 6 вершин, возле каждой написана её степень. Каково наибольшее количество различных чисел среди написанных?
4. На столе лежат 5 монет. Все золотые монеты касаются разного числа монет. Каково наибольшее число золотых?

Задачи на ответ и пример

5. На столе лежат 5 монет, их размеры не обязательно одинаковы. Каждая золотая монета касается ровно трёх других монет (она может касаться и не золотых). Каково наибольшее число золотых?
6. В графе 5 вершин, степень каждой – не больше 3. Какое наибольшее число рёбер в таком графе?
7. На доске нарисованы 5 отрезков, не продолжающих друг друга. Точки пересечения отрезков отмечены. Для каждого отрезка записали число точек пересечения на нём. Какое наибольшее число написанных чисел могут быть различными?

Зачётные задачи

ГС1. На шахматной доске стоит несколько ладей белого и чёрного цвета. Все белые бьют разное число ладей. Каково наибольшее число белых? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или на одной вертикали и между ними нет других ладей.)

ГС2. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой другой ровно по разу (такой турнир называется *однокруговым*).

- а) Могут ли все команды сыграть вничью разное число матчей?
- б) Могут ли все команды одержать разное число побед?

ГС3. В графе с 9 вершинами каждые две вершины соединены ребром. Каждое ребро покрашено в какой-нибудь цвет так, что нет рёбер одинакового цвета, выходящих из одной вершины.

- а) Может ли быть использовано ровно 8 цветов?
- б) Может ли быть использовано ровно 9 цветов?

ГС4. а) Можно ли разбить квадрат на 12 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?

б) Можно ли разбить квадрат на 13 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?