

Графы: рисуем и считаем

Определение 1. Скажем, что задан *граф*, если задано множество его *вершин* и про любую пару вершин сказано, *связаны* они *ребром* или нет (будем рассматривать только пары из двух различных вершин). Если две вершины соединены, то только одним ребром.

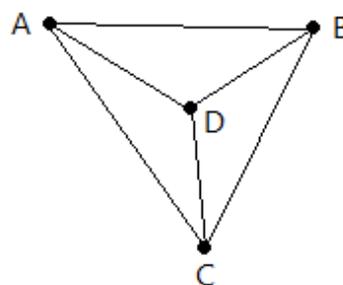
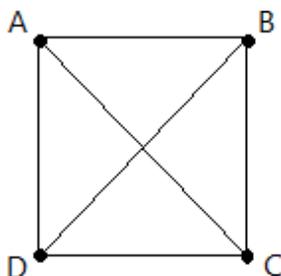
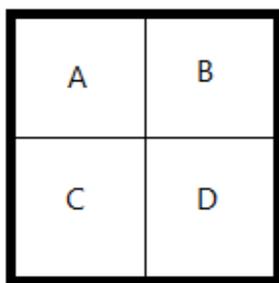
Примеры. а) Граф знакомств: вершины – школьники, ребра – знакомства.

б) Карта: вершины – страны, ребра – пары стран с общим участком границы.

в) города и дороги;

г) граф короля (коня, ладьи, ферзя...): вершины – клетки, ребра – пары клеток, связанных ходом короля (коня, ладьи, ферзя...).

Один и тот же граф можно нарисовать по-разному.



Пример. См. рис. графа короля на доске 2x2:

1. Вершины и ребра графа – это вершины и рёбра куба. Нарисуйте этот граф, чтобы рёбра не пересекались. Сколько в этом графе вершин и рёбер?

Определение 2. *Степень* вершины – это число выходящих из них рёбер.

2. Нарисуйте граф с 4 вершинами так, чтобы в нём нашлись три вершины разной степени. Какая степень встречается дважды?

3. Посчитайте во всех нарисованных графах сумму степеней всех вершин и число рёбер. Как связаны между собой эти числа? Сформулируйте теорему о сумме степеней вершин и докажите её.

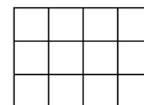
4. Дан граф короля на шахматной доске 4x4.

а) Какие степени вершин встречаются в этом графе?

б) Сколько рёбер в этом графе?

Задачи на ответ и пример

5. Граф нарисован как клетчатый прямоугольник 3x4 (см. рис). Вершины графа – это вершины клеток, рёбра графа – стороны клеток. Сколько в этом графе вершин нечётной степени?



6. Вершины графа – клетки доски 2x3, рёбра – ходы ладьи (не забудьте, что ладья прыгает по горизонтали и вертикали на любое расстояние). Нарисуйте этот граф так, чтобы рёбра не пересекались. Сколько в этом графе вершин и ребер?

7. Квадратный остров разделен на 6 прямоугольных княжеств. Если у пары княжеств есть общий отрезок границы, их столицы соединены отдельной дорогой, а других дорог на острове нет. Нарисуйте пример карты острова с 11 дорогами.

Зачётные задачи

РГ1. Нарисуйте граф с 5 вершинами в котором наибольшее возможное число рёбер. Сколько в нём рёбер? Нарисуйте этот граф так, чтобы пересечений рёбер было как можно меньше.

РГ2. а) В 13-угольнике провели 30 диагоналей, при этом из 3 вершин выходит по 3 диагонали, из 4 вершин – по 4 диагонали, из 5 вершин – по 5 диагоналей. Сколько диагоналей проведено из последней вершины? (*Диагональ* – это отрезок с концами в несоседних вершинах многоугольника)

б) На космической станции несколько помещений. Если у двух помещений есть общая стена, то

между ними есть люк (для экономии люк один, даже если общих стен несколько). Известно, что в каждом помещении 6 люков, а всего на станции 36 люков. Сколько помещений на станции?

РГ3. Во дворе живут 5 пёсиков: Шарик, Гарик, Карик, Царик и Чинарик. Каждому из них случалось драться с кем-нибудь из остальных, причем у Шарика, Гарика, Карика и Царика число тех, с кем они дрались – разное. Со сколькими собаками двора дрался Чинарик?

РГ4. Саша по одному выставляет королей на шахматную доску 8×8 , записывая для каждого, сколько ранее выставленных королей он побил. Доска заполнилась. Докажите, что сумма выписанных чисел не зависит от порядка выставления. Чему она равна?

Онлайн-кружок 6 класса, 11 ноября 2023 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Mmoln/2023-24/index.html>