

Симметричные пары

Пусть в некотором множестве случаев (чисел, слов, комбинаций) надо посчитать только *хорошие* случаи. Может помочь разбиение случаев на пары так, чтобы в каждой паре был ровно один хороший случай. Часто помогает симметрия, когда случаи в паре *симметричны* друг другу.

1. Маше подарили шесть кубиков: синий, зелёный, алый, белый, оранжевый и розовый. Маша строит из них шестиэтажные башни. Сколько вариантов построить башню так, чтобы белый кубик был выше алого?

Для неупорядоченного набора X часто парным будет *дополнение*: все элементы, кроме элементов X . Может оказаться, что дополнительные наборы пересчитать легче.

2. Для опасной работы в шахте Белоснежка должна выбрать пять гномов из семи. Сколькими способами она может это сделать?

Симметрия может разбивать на пары не все случаи: некоторые самосимметричны, для других симметричного случая нет. Если такие исключения легко сосчитать, то и счёт хороших случаев упрощается.

3. а) Сколько трёхзначных чисел, где все цифры различны, *уменьшатся* при записи их задом наперёд?

б) Сколько трёхзначных чисел, где нет нуля, но могут быть одинаковые цифры, *увеличатся* при записи их задом наперёд?

Дополнение возможно и для чисел: парное число дополняет наше до постоянной суммы.

4. а) Среди трёхзначных кодов от 000 до 999 каких больше и на сколько: с суммой цифр 10 или с суммой цифр 17?

б) Среди трёхзначных чисел каких больше и на сколько: с суммой цифр 10 или с суммой цифр 17?

Задачи на быстрый ответ

5. Выписаны все слова, составленные из трёх разных букв слова АПОРТ. У скольких из них слово, записанное задом наперёд, идёт в словаре раньше?

6. У скольких девятизначных чисел цифры идут строго по убыванию?

7. У скольких пятизначных чисел-палиндромов сумма цифр равна 7?

Зачётные задачи

СП1. Выписаны все слова, составленные из четырёх *разных* букв слова АПОРТ. Во скольких из них буква П стоит левее буквы Р?

СП2. У скольких шестизначных чисел произведение цифр равно 625?

СП3. а) Выписаны всевозможные пятизначные числа без цифры 0 в записи. Вова посчитал, у скольких из них цифры идут слева направо по возрастанию (то есть каждая не меньше предыдущей), а Уля – у скольких по убыванию. Например, число 22345 – Вовино, 76665 – Улино, а 12658 – ничьё. Докажите, что если никто не ошибся, то у Вовы и Ули получатся равные результаты.

б) Среди всех трёхзначных чисел каких больше: тех, где цифры идут слева направо по нестрогому возрастанию или тех, где цифры идут по нестрогому убыванию? На сколько больше?

в) Среди всех четырёхзначных чисел каких больше: тех, где сумма цифр 21 и цифры идут слева направо по нестрогому возрастанию или тех, где сумма цифр 15 и цифры идут по нестрогому убыванию? На сколько больше?

СП4. Назовём натуральное число *хорошим*, если его чётность совпадает с чётностью его суммы цифр (например, 666 и 2021 – хорошие, а 57 и 1998 – нехорошие).

а) Среди трёхзначных чисел каких больше: хороших или нехороших?

б) Сколько хороших среди чисел от 1 до 1000?

СП5. Назовём трёхзначное число *бугром*, если его вторая цифра больше двух других, и *ямой*, если вторая цифра меньше двух других. Чего больше: бугров или ям, и на сколько?

СП6. В клетки таблицы 6×8 нужно вписать числа $1, 2, 3, \dots, 48$. Каких способов больше: тех, где в крайних клетках ровно 7 простых чисел или тех, где простых на краю ровно 8?

Онлайн-кружок 6 класса, 13 мая 2023 г, <http://www.ashap.info/Uroki/Mmoln/2022-23/index.html>