

Графы: подсчет рёбер и компонент

1. а) Какое наименьшее число компонент связности может быть в графе с 7 вершинами? А наибольшее?
б) В графе с 10 компонентами связности провели одно ребро. Сколько компонент может быть в полученном графе?

Теорема. Дан граф с N вершинами.

- а) Если граф связан, то в нём не менее $N-1$ рёбер.
б) Если в графе K компонент связности, то в нём не менее $N-K$ рёбер.

2. В проволочной клетчатой сетке 2×2 сделали 5 разрезов в серединах сторон клеток. Докажите, что сетка развалится на части.

3. Из спичек сложен квадрат, разбитый на 16 квадратных клеток со стороной в одну спичку.

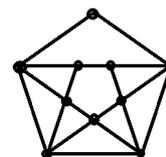
- а) В левой нижней клетке сидит жук, который не может переползти через спичку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы жук мог доползти до любой клетки?
б) В каждой угловой клетке сидит по жуку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы для каждой клетки был жук, который мог бы до неё доползти?

4. Есть 8 камней разного веса. За одно взвешивание можно сравнить любые два камня между собой. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка найти самый тяжёлый?

Зачётные задачи

РК1. а) Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по рёбрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в каждую другую?

б) Можно ли рёбра графа на рисунке раскрасить в два цвета так, чтобы между любыми двумя вершинами был путь как по рёбрам одного цвета, так и по рёбрам другого цвета?

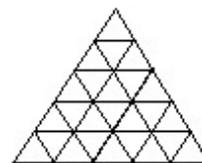


РК2. Клетчатую плитку шоколада 5×20 разрешается за один ход разломить по границам клеток на два меньших прямоугольных куска. Следующим ходом разрешается выбрать любой кусок и так же разломить его на два, и т.д. При этом ни в какой момент не должно возникать квадратных кусков. Какое наибольшее число ходов может быть сделано?

РК3. Тетрадный лист раскрасили в 10 цветов по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется *хорошей*, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

РК4. Дан граф (см. рис.): вершины – вершины треугольничков, рёбра – стороны треугольничков.

- а) Сколько рёбер надо стереть, чтобы граф развалился на 6 компонент связности: 3 цикла и 3 цепочки?
б) Какое наименьшее число рёбер надо стереть, чтобы граф развалился на циклы и цепочки, причем тех и других поровну?



РК5. Из спичек сложен квадрат, разбитый на 36 квадратных клеток со стороной в одну спичку.

- а) Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы доска разбилась на 6 равных многоугольников?
б*) Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы доска разбилась на 4 равных многоугольника?

РК6*. В клетчатом прямоугольнике 5×8 провели по одной диагонали в каждой клетке и сделали разрез по этим диагоналям. На какое наименьшее число частей мог развалиться прямоугольник?

РК7*. На острове живут два племени. 40 туземцев надо посадить в два автобуса так, чтобы в каждом автобусе были люди только из одного племени. За один вопрос можно узнать у любой пары, они из одного племени или из разных. За какое наименьшее число вопросов можно рассадить всех?