Графы: связность, циклы, цепочки

1. В деревне Кефировке 9 дворов. Известно, что у Пётра соседи Иван и Артём, Ярослав сосед Ивану и Савве, Фёдор – Даниилу и Георгию, а также соседствуют Егор с Георгием, Иван с Саввой, Егор с Даниилом, Савва с Артёмом и больше соседей в Кефировке нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Пётр дворами пробраться к Георгию за яблоками?

Определение Граф *связный*, если от любой его вершины можно пройти по ребрам до всех других вершин. Всякий несвязный граф распадается на связные куски, называемые *компонентами связности, а* связный граф состоит из одной компоненты.

2. В трех вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

Определение. Граф n-угольника (вершины – вершины, стороны – рёбра) называется *циклом* и обозначается C_n. Граф вида **0 – 0 – … – 0 – 0** называется *цепь.*
Примеры. Граф ладьи на доске 2x2 – цикл длины 4. Граф короля на доске 1x8 – цепь из 8 вершин. Граф слона на доске 2x8 распадается на две цепи из 8 вершин.

Теорема (о степенях 1 и 2).
1. Если в (конечном) графе все вершины – степени 2, то его компоненты связности – циклы.
2. Если в (конечном) графе степени всех вершин не больше 2, то его компоненты связности – циклы и цепи.

3. В графе по 10 вершин степени 1 и степени 2, а других вершин нет. Сколько из его компонент связности – цепи?

4. 20 школьников решили 20 задач. Известно, что каждый решил по 2 задачи, и каждую задачу решило 2 человека. Докажите, что можно попросить каждого школьника рассказать одну из решенных им задач так, чтобы все задачи были рассказаны.

Бывает полезно рассмотреть ту или иную компоненту связности как отдельный граф.
5. В графе вершина А степени 3, вершина Я– степени 13, а все остальные вершины от Б до Ю – степеней 10 и 20. Докажите, что можно пройти по рёбрам от А до Я.

Зачётные задачи

ЦЦ1. Связан ли граф коня **а)** на доске 3x3; **б)** на доске 4x4?

ЦЦ2. а) По кругу растут 12 кувшинок. Лягушка может прыгать через 3 пустые кувшинки на 4-ю. Считаем кувшинки вершинами графа, а прыжки – ребрами. Сколько компонент связности в этом графе?
б) А если кувшинок 9?
в) А если кувшинок 10?

ЦЦ3. В каждой компоненте связности графа с 11 вершинами есть хотя бы одно ребро. Каково наибольшее число компонент?

ЦЦ4. а) В классе 30 учеников, у каждого ровно по 2 друга. Докажите, что можно организовать не менее 10 дежурств так, чтобы дежурили по двое друзей, и никто не дежурил дважды.
б) Всегда ли можно организовать 11 дежурств?

ЦЦ5. а) В графе 33 вершины, степень каждой не меньше 16. Докажите, что граф связен.
б) На Марсе 66 подземных городов, некоторые пары городов связаны тоннелями. Из столицы выходит 40 тоннелей, из каждого другого города – не менее 25 тоннелей. Докажите, что можно из любого города добраться до любого другого, не вылезая на поверхность.

ЦЦ6. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по две бусинки в каждую коробку. Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета.