

## Графы: свойства степеней

**Определение.** *Степень* вершины в графе – это число выходящих из неё рёбер.

В прошлый раз мы доказали теорему о сумме всех степеней. Сегодня мы докажем лемму о рукопожатиях и лемму о повторении степеней.

1. В классе учится 15 человек. Может ли у 4 учеников быть в классе ровно по 4 друга, у 5 учеников – ровно по 5 друзей и у 6 учеников – ровно по 6 друзей?
2. Можно ли расположить на столе 7 монет так, чтобы каждая касалась ровно трех других?
3. В графе 10 вершин, возле каждой написана её степень. Каково наибольшее количество различных чисел среди написанных?
4. На шахматной доске стоит 6 королей белого и чёрного цвета. Все белые бьют разное число королей. Каково наибольшее число белых?

### Зачётные задачи

**ГС1.** На шахматной доске стоит несколько ладей белого и чёрного цвета. Все белые бьют разное число ладей. Каково наибольшее число белых? (Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или на одной вертикали и между ними нет других ладей.)

**ГС2.** В однокруговом футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой другой ровно по разу.

**а)** Могут ли все команды сыграть вничью разное число матчей?

**б)** Могут ли все команды одержать разное число побед?

**ГС3.** В графе с 9 вершинами каждые две вершины соединены ребром. Каждое ребро покрашено в какой-нибудь цвет так, что нет рёбер одинакового цвета, выходящих из одной вершины.

**а)** Может ли быть использовано ровно 8 цветов?

**б)** Может ли быть использовано ровно 9 цветов?

**ГС4.** Некоторые пары аэропортов страны связаны авиалиниями, причем если пара связана авиалинией, то только одной. Все авиалинии поделены между пятью компаниями. Из аэропорта Дальний выходит только одна авиалиния, из всех остальных аэропортов – по 5. Докажите, что кроме Дальнего, есть ещё хотя бы один аэропорт, из которого летают не все компании.

**ГС5. а)** Можно ли разбить квадрат на 12 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?

**б)** Можно ли разбить квадрат на 13 треугольников так, чтобы каждый граничил (по отрезку ненулевой длины) ровно с тремя другими треугольниками?

**ГС6.** На клетчатую доску 4x4 по одному выставляют королей: первый куда угодно, а каждый следующий должен побить нечётное число ранее выставленных. Какое наибольшее число королей можно так выставить?