

Графы: рисуем и считаем

Определение 1. Скажем, что задан *граф*, если задано множество его *вершин* и про любую пару вершин сказано, *связаны* они *ребром* или нет (будем рассматривать только пары из двух различных вершин). Если две вершины соединены, то только одним ребром.

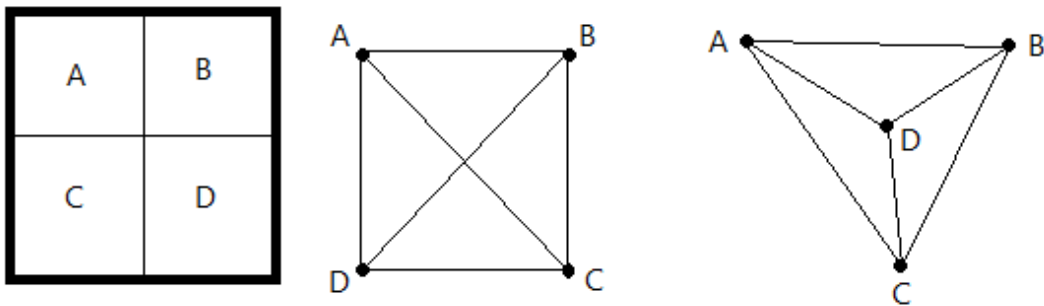
Примеры. а) Граф знакомств: вершины – школьники, ребра – знакомства.

б) Карта: вершины – страны, ребра – пары стран с общим участком границы.

в) города и дороги;

г) граф короля (коня, ладьи, ферзя...): вершины – клетки, ребра – пары клеток, связанных ходом короля (коня, ладьи, ферзя...).

Один и тот же граф можно нарисовать по-разному, см. рис. графа короля на доске 2x2:



1. Вершины и ребра графа – это вершины и рёбра куба. Нарисуйте этот граф, чтобы рёбра не пересекались. Сколько в этом графе вершин и рёбер?

Определение 2. *Степень* вершины – это число выходящих из неё рёбер.

2. Нарисуйте граф с 4 вершинами так, чтобы в нём нашлись три вершины разной степени. Какая степень встречается дважды?

3. Посчитайте во всех нарисованных графах сумму степеней всех вершин и число рёбер. Как связаны между собой эти числа? Сформулируйте теорему о сумме степеней вершин и докажите её.

4. Дан граф короля на доске 4x4.

а) Какие степени вершин встречаются в этом графе?

б) Сколько рёбер в этом графе?

Зачётные задачи

РГ1. Вершины графа – клетки доски 2x3, рёбра – ходы ладьи (не забудьте, что ладья прыгает на любое расстояние). Нарисуйте этот граф так, чтобы ребра не пересекались. Сколько в этом графе вершин и ребер?

РГ2. Нарисуйте граф с 5 вершинами в котором наибольшее возможное число рёбер. Сколько в нём рёбер? Нарисуйте этот граф так, чтобы пересечений рёбер было как можно меньше.

РГ3. а) В 13-угольнике провели 30 диагоналей, при этом из 3 вершин выходит по 3 диагонали, из 4 вершин – по 4 диагонали, из 5 вершин – по 5 диагоналей. Сколько диагоналей проведено из последней вершины? (*Диагональ* – это отрезок с концами в несоседних вершинах многоугольника)

б) На космической станции несколько помещений. Если у двух помещений есть общая стена, то между ними есть люк (для экономии люк один, даже если общих стен несколько). Известно, что в каждом помещении 6 люков, а всего на станции 36 люков. Сколько помещений на станции?

РГ4. Во дворе живут 5 пёсиков: Шарик, Гарик, Карик, Царик и Чинарик. Каждому из них случилось драться с кем-нибудь из остальных, причем у Шарика, Гарика, Карика и Царика число тех, с кем они дрались – разное. Со сколькими собаками двора дрался Чинарик?

РГ5. Иван по одному выставляет королей на шахматную доску 8x8, записывая для каждого, сколько ранее выставленных королей он побил. Доска заполнилась. Докажите, что сумма выписанных чисел не зависит от порядка выставления. Чему она равна?

РГ6* В стране Петерсении каждый аэропорт связан беспосадочными авиалиниями с тремя другими аэропортами страны. Известно, что из любого аэропорта можно долететь до любого другого напрямую или с одной пересадкой. Какое наибольшее число аэропортов может быть в стране?