

## Принцип крайнего

22 июля

**Идея 1. Нужным свойством часто обладает крайний (наибольший, наименьший) объект.**

1. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что некоторая ладья бьет не более двух других.
2. На листке написано несколько натуральных чисел. Известно, что для любых двух найдется на листке число кратное им обоим. Докажите, что на листке есть число кратное всем.
3. В порядке возрастания весов лежат несколько мешков. Есть чашечные весы без гирь. За какое наименьшее число взвешиваний кладовщик Васильич может проверить, что любая пара мешков тяжелее любого другого мешка?

**Идея 2. Узкое место. Крайние свойства могут быть и у объекта, с виду расположенного где-то в середине.**

4. а) Можно ли натуральные числа от 1 до 99 выписать в строку так, чтобы разность любых двух соседних (из большего вычитается меньшее) была не меньше 50?  
б) Тот же вопрос для чисел от 1 до 100?
5. Легко распилить кубик  $3 \times 3 \times 3$  на 27 кубиков шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если части разрешается перекладывать и пилить по несколько частей сразу?

**Идея 3. Критический момент часто случается в конце процесса.**

6. Саша выставляет на пустую шахматную доску лады: первую – куда захочет, а каждую следующую ставит так, чтобы она побила (в этот момент) нечетное число ранее выставленных ладей. Какое наибольшее число ладей он сможет так выставить?
7. Маляр-хамелеон ходит на одну клетку как обычная ладья. Придя на клетку, он либо принимает ее цвет, либо перекрашивает ее в свой цвет. Белый маляр ставится на черную доску.  
а) Может ли он добиться шахматной раскраски?  
б)\* Найдите все раскраски, которых он может добиться?

**Идея 4. Цепочку рассуждений выгодно начать с края, с узкого места.**

8. В 100-угольнике длина каждой стороны равна полусумме длин соседних сторон. Докажите, что длины всех сторон равны.
9. На доске были написаны 5 чисел. Сложив их попарно, получили следующие 10 чисел: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Какие числа были написаны?

**Разной**

10. На клетчатой доске  $100 \times 100$  стоит несколько ладей. Докажите, что их можно раскрасить в 3 цвета так, чтобы ладьи одного цвета друг друга не били.
11. На столе лежат несколько круглых монет, касаясь, но не перекрывая друг друга. Докажите, что какая-то монета касается не более пяти других. (Размеры монет могут быть любыми).

*Для самостоятельного решения*

**Кр1.** На каждой клетке шахматной доски вначале стоит по ладье. Каждым ходом можно снять с доски ладью, которая бьет нечетное число ладей. Какое наибольшее число ладей можно снять?

**Кр2.** По кругу записаны 30 чисел, каждое равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке (то есть разности с отброшенным знаком). Сумма всех чисел равна 300. Что это за числа и в каком порядке записаны?

**Кр3.** За день в библиотеке побывало 100 читателей, каждый по разу. Оказалось, что из любых трех по крайней мере двое там встретились. Докажите, что библиотекарь мог сделать важное объявление в такие два момента времени, чтоб все 100 читателей его услышали.

**Кр4.** Были две палки одинаковой длины. Каждую из них распилили на 100 кусков (не обязательно одинаковых). Докажите, что можно выбрать 101 кусок и сложить из них всех 101-угольник.