

Перевод на другой язык (изоморфизм)

22 июля

How much is five plus seven?

Задача, переведенная на другой язык, может оказаться гораздо легче. Не забудьте только перевести решение обратно!

1. Докажите, что а) сумма первых n нечетных чисел равна n^2 ;
б) $1+4\cdot 2+4\cdot 4+\dots+4\cdot 2n=(2n+1)^2$.
2. Найдутся ли 6 различных дробей вида $1/k$ так, чтобы сумма первых трех была равна сумме остальных?
3. а) На пустой шахматной доске двое играющих по очереди двигают коня. Двигать можно только влево-вниз. Кто не сможет сделать ход – проиграл. Найдите все клетки, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник.
б) В двух коробочках лежат орехи, в каждой не более семи. Играют двое. За один ход нужно взять три ореха – два из одной коробочки, третий – из другой. Найдите все позиции, начав с которых первый может выиграть, как бы хорошо не играл противник.

Переводят обычно на знакомый язык, где начинает работать интуиция!

4. а) Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 в строку так, чтобы соседи отличались не меньше чем на 3?
б) Сколько есть замкнутых маршрутов хромой ладьи по всем полям доски 4×4 ?
в) Летучая ладья ходит как обычная, только не может пойти на соседнее поле. Сколько есть замкнутых маршрутов летучей ладьи по всем полям доски 4×4 ?
5. а) Капитаны Боб и Иван состязаются в изготовлении и употреблении крепких напитков. Боб сделал коктейль из рома и портвейна, а Иван смешал водку с брагой. Известно, что ром крепче водки, а портвейн крепче браги. Могла ли смесь Ивана оказаться крепче коктейля Боба? (Крепость – это процент алкоголя в смеси).
б) Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причём доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Обязательно ли доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?
6. Следующая игра является переводом на другой язык одной очень популярной игры. Какой?
«На столе лежат 9 карточек с числами от 1 до 9. Двое играющих по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто первым после своего хода сможет выложить три карточки с суммой 15.»

Геометрические задачи можно перевести в алгебраические, введя координаты. Но с помощью координат можно и алгебраические задачи решать на геометрическом языке!

7. Докажите неравенство для положительных чисел a, b, c, d :

$$\sqrt{(a+b)^2 + (c+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2}$$

8. Три бегуна стартовали одновременно и бегут каждый со своей постоянной скоростью. Вслед им выехал через некоторое время тренер на мотороллере, догнал переднего бегуна, развернулся, доехал до заднего бегуна, развернулся и еще раз догнал переднего бегуна. Таким образом, тренер трижды проезжал мимо среднего бегуна, и по 2 раза был возле остальных бегунов. Скорость мотороллера была постоянной. Известно, что в первый раз время тренера на езде от среднего бегуна до переднего равно времени от разворота возле заднего бегуна до обгона среднего. Докажите, что тренер обгонял (встречал) среднего бегуна через равные промежутки времени.

Переводят для того, чтобы обойти препятствие: так, туристы, идущие вдоль берега и натолкнувшись на скалы, могут обойти их, временно переправившись на другой берег.

9. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{99}$. За одну операцию пара выбранных чисел a и b заменяется на $ab+a+b$. После 99 операций осталось одно число. Какое?

Для самостоятельного решения

Я1. Докажите неравенство

$$\sqrt{(x_1+x_2+\dots+x_n)^2 + (y_1+y_2+\dots+y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

Я2. На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа x и y ($x \leq y$). Петя записывает на бумажке x^2 (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами x и $y - x$, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

Я3. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{99}$. За одну операцию пара выбранных чисел a и b заменяется на отношение их произведения к их сумме. После 99 операций осталось одно число. Какое?

Я4. За круглым столом были приготовлены 12 мест для жюри с указанием имени на каждом месте. Николай Николаевич, пришедший первым, по рассеянности сел не на свое, а на следующее по часовой стрелке место. Каждый член жюри, подходивший к столу после этого, занимал свое место или, если оно уже было занято, шел вокруг стола по часовой стрелке и садился на первое свободное место. Возникшее расположение членов жюри зависит от того, в каком порядке они подходили к столу. Сколько может возникнуть различных способов рассадки жюри?