

Жадный алгоритм

21 июля

Алгоритм – это способ достижения цели через жестко определенную последовательность шагов. Когда в ответе надо предъявить алгоритм, естественно рассматривать его как составную конструкцию. Типичные примеры: выигрышная или ничейная *стратегия* в играх. Кроме того, алгоритмы регулярно возникают в задачах на испытания. Если цель – максимум какой-то величины, то ее часто достигают с помощью «жадного алгоритма», то есть добиваясь максимально возможного приращения на каждом шаге.

1. На блюде лежат несколько кусков сыра. Сначала Костя берет себе один из полученных кусков, потом Ваня – один из оставшихся кусков, затем снова Костя и т.д. пока не разберут весь сыр. Докажите, что Костя всегда сможет взять себе сыра не меньше Вани по общему весу.
2. На столе лежат 100 коробок с 1, 2, 3, ..., 100 конфетами. Саша и Искандер по очереди берут по одной коробке за ход, начинает Саша. Каждый старается получить в сумме как можно больше конфет. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?
3. На блюде лежат 11 кусков сыра. Сначала Маша может разрезать каждый кусок на два. Затем Альбина берет себе один из полученных кусков, потом Маша – один из оставшихся кусков, затем снова Альбина и т.д. пока не разберут весь сыр. Каждая старается получить как можно больше. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

Бывает полезно ввести вспомогательную величину для оптимизации.

4. За какое наименьшее число ходов конь может пройти из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний?
5. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость n окружностей?

Отклонение от жадности

Часто можно показать, что жадный алгоритм не достигает результата. Доказав недостижимость, подумайте, нельзя ли из этого извлечь указания, и достичь результата, следующего за жадным.

6. $ABCD$ – квадрат со стороной 8. Разрешено делать шаги длины 1, не выходя за пределы квадрата. За какое наименьшее число шагов можно пройти из A в C ?
7. В банке работают 2002 сотрудника. Все сотрудники пришли на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?
8. а) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу – белые, вверху – черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или

горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые – вверху?

б) То же для доски 9×9 .

9. Назовем треугольники *сходными*, если у них совпадают по длине по две стороны. За один ход можно заменить треугольник на сходный. За какое наименьшее число ходов можно из правильного треугольника со стороной 10 получить правильный треугольник со стороной 1?

Для самостоятельного решения

ЖА1. На столе лежат несколько кусков шоколада, самый большой весит b . Петя начинает, и они с Васей по очереди съедают по куску, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях Васи Петя сможет съесть больше Васи не более, чем на b .

ЖА2. На блюде лежат 15 кусков сыра двух весов. Сначала Вася может разрезать некоторые из этих кусков (но не все) каждый на две части так, чтобы снова все куски были только двух весов. Затем Петя берет себе один из кусков, потом Вася – один из оставшихся кусков, затем снова Петя и т.д. пока не разберут весь сыр. Каждый старается получить как можно больше. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

ЖА3. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида “уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника”, где a, b – действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника – нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?

ЖА4. На первой горизонтали шахматной доски стоят 8 одинаковых черных ферзей, а на последней – 8 одинаковых белых ферзей. За какое минимальное число ходов белые ферзи могут обменяться местами с черными? Ходят белые и черные по очереди, по одному ферзю за ход.