

Редукция, индукция и рекурсия

20 июля

1. Четырёхлетний Сёма умеет писать только цифры 4 и 7. Докажите, что он может написать число с любой суммой цифр больше 17.
2. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость n прямых?
3. Разрежьте треугольник на а) 4 б) 16 в) 25 г) 1000 д) $n > 6$ меньших треугольников с такими же углами, как у исходного.
4. а) Найдите набор из 5 гирь, которыми можно набрать любой целый вес от 1 до 31 г.
б) Найдите набор из 6 гирь общим весом 60 г, которыми можно набрать любой целый вес от 1 до 60 г.
в) Докажите, что если $2^{k-1} \leq n < 2^k$, то есть набор из k гирь общим весом n г, которыми можно набрать любой целый вес от 1 до n г.
5. Докажите, что
а) каждое неоднозначное число больше произведения своих цифр.
б) $2^n > n^2$ при всех натуральных n .
6. а) Незамкнутая цепочка составлена из 7 звеньев. Известно, что одно из звеньев – фальшивое, легче остальных. Как, раскрыв не более двух звеньев, при помощи взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивое звено? (Число взвешиваний не ограничено. При раскрывании звена цепочка распадается на 3 части: это звено, цепочка слева от звена и цепочка справа.)
б) А как найти фальшивое в цепочке из 63 звеньев, раскрыв 5 звеньев?
в) Для какого наибольшего n можно найти одно фальшивое звено в цепочке из n звеньев, если разрешается раскрыть не более чем k звеньев?
7. В прямоугольнике $3 \times n$ (3 строки, n столбцов) расставлены фишки трех цветов по n штук каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце были фишки всех трех цветов.
8. 10 бандитов ограбили банк на миллион долларов и уселись в ряд за стол делить деньги. Сначала первый предлагает, кому сколько: мне столько-то, второму столько-то и т.д., и все 10 голосуют. Если «за» не менее половины, то предложение принимается, каждый получает предложенную долю, и все расходятся. Если более половины голосуют «против», первого убивают, и тогда уже второй бандит предлагает кому сколько на тех же условиях, и т.д.
Каждый бандит руководствуется в первую очередь желанием выжить, во вторую (если жизнь вне опасности) – получить побольше денег, в третью (если на жизнь и сумму это не влияет) – не убивать без необходимости (дело-то не последнее!). Как распределятся деньги, если все бандиты будут действовать и рассуждать абсолютно логически?
9. В клетчатом квадрате $n \times n$ стерли все клетки выше главной диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол. В каждую клетку оставшейся «лесенки» записывают 0 или 1, при этом, если в какой-то клетке написана единица, то и в соседних с ней по стороне слева и сверху также должна стоять единица. Сколькими способами это можно сделать?

Задачи для самостоятельного решения

И0. Доказать тождества:

а) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+0,5)(n+1)}{3}$

б) $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$.

И1. а) Отметьте на плоскости 10 точек, которые нельзя зачеркнуть тремя прямыми, но любые 9 из них – можно.

б) Отметьте на плоскости 55 точек, которые нельзя зачеркнуть 9-ю прямыми, но любые 54 из них – можно.

И2. Есть двухчашечные весы. При взвешивании груза гири можно класть на одну или на обе чаши весов.

а) Найдите набор из 4 гирь, которыми можно взвесить любой груз целого веса от 1 до 80 г.

б) Дано натуральное число k . Для каких n есть набор из не более чем k гирь общим весом n , которыми можно взвесить любой груз целого веса от 1 до n ?

И3. Можно ли отметить на плоскости несколько точек так, чтобы на расстоянии 1 от каждой отмеченной точки находилось ровно 10 отмеченных?

И4. Отряд девочек отправился в поход. После того, как они вернулись, их родителям стало известно, что хотя бы одна из них искупалась в походе без разрешения, и каждый решил высечь свою дочь, если узнает о том, что она купалась. Каждое утро девочки ходят в школу и обмениваются слухами о том, кто искупался в походе и кого высекли родители, которые сообщают вечером родителям (исключая информацию о том, купались ли они сами). Через 13 дней несколько отцов, получив очередную порцию информацию, догадались о провинности их дочерей и высекли их. Сколько детей получило в этот вечер наказание?

И5. Есть 2^n монет двух различных весов, монет каждого веса поровну. Как на чашечных весах без гирь гарантированно найти две монеты *разного* веса не более чем за n взвешиваний?