

Счастливые билеты

17 июля

Определение. Билет с шестизначным номером от 000000 до 999999 называется *счастливым*, если сумма его первых трех цифр равна сумме последних трех цифр.

Наша цель – найти количество счастливых билетов (КСБ).

Упр1. Докажите, что КСБ не более 100000.

Обозначение. a_k – количество трехзначных номеров с суммой цифр k ,
 b_k – количество шестизначных номеров с суммой цифр k .

Зад2. Докажите, что КСБ с суммой цифр $2k$ равно a_k^2 .

Упр3. Найдите а) a_4 ; б) a_9 .

Зад4. Докажите, что КСБ равно $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{27}^2$.

Зад5. Докажите, что $a_k = a_{27-k}$

Зад6. Докажите, что КСБ равно $2(a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{13}^2)$.

Определение. Рассмотрим все тройки неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x+y+z=k$. Назовем *нарушением*, если x , y или z больше 9. Назовем тройку *хорошей*, если в ней нет нарушений и *плохой* в противном случае. Аналогично определяются плохие и хорошие шестерки.

Упр7. Найдите количество плохих троек при $k=10$ и $k=11$.

Зад8. Докажите, что при $10 \leq k \leq 19$ количество плохих троек равно $3a_{k-10}$

Упр9. Найдите все a_k при $k=0,1,2,\dots,12,13$ и вычислите КСБ.

Зад10. Докажите, что КСБ равно количеству шестизначных номеров с суммой цифр 27.

Зад11. Докажите, что $\text{КСБ} < C_{32}^5$.

Зад12. Докажите, что при $10 \leq k$ количество плохих шестерок $\leq 6C_{k-5}^5$.

Зад13. Докажите, что $\text{КСБ} > C_{32}^5 - 6C_{22}^5$.

Зад14. Докажите, что при данном k количество плохих шестерок с двумя нарушениями в данных местах равно C_{k-15}^5 .

Зад15. Докажите, что $\text{КСБ} = C_{32}^5 - 6C_{22}^5 + C_6^2 C_{12}^5$.

Для самостоятельного решения

СБ1. Найдите количество а) четырехзначных; б) восьмизначных счастливых билетов.

СБ2. В выражении $(1+x^2+x^4)^{30} + (1+x^3+x^6)^{20}$ раскрыли скобки и привели подобные. Сколько слагаемых получилось?

СБ3. Куб с ребром длины 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трех направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

СБ4. Выведите формулу, как в задаче 14, для количества восьмизначных счастливых билетов.