Чередование

16 июля

Обходы двудольных графов

1. Может ли конь обойти шахматную доску 7×7 так, чтобы побывать на каждом поле ровно по одному разу и вернуться последним ходом на исходное поле?

2. Отмечены вершины и центры граней куба и проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

Лемма 3. Пусть Г – двудольный граф с черными и белыми вершинами.
а) Если в Г есть замкнутый цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то вершин каждого цвета – поровну.
б) Если в Г есть путь, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу, то что число белых вершин отличается от числа черных вершин не более чем на 1.

4. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

Чередование комбинаций

5. Докажите, что следующие графы – двудольные:
а) Вершины графа – расстановка пары фишек на шахматной доске. Две расстановки связаны ребром, если позиции получаются друг из друга ходом фишки на одну клетку по вертикали или горизонтали.
б) Вершины – расположения трех пронумерованных кузнечиков на прямой. Ребро – прыжок кузнечика ровно через одного другого.
в) Вершины – расположения трех пронумерованных кузнечиков на плоскости (но не на одной прямой). Ребро – прыжок кузнечика, пересекающий отрезок с концами в двух других кузнечиках.
г) То же, что (а) для n фишек
д) Вершины – перестановки из n чисел, ребра – расположения, получающиеся друг из друга перестановкой двух стоящих рядом чисел.
е) То же, что (д), но можно менять местами любые два числа.
ж) Вершины графа – это узлы клетчатой бумаги, ребра – отрезки фиксированной длины L.

Упр6. а) На прямой сидят три кузнечика. Каждую минуту один из них прыгает ровно через одного из других. Могут ли кузнечики ровно через 99 минут вернуться на исходные места?
б) Картонный треугольник катают по плоскости, переворачивая через стороны. Через 99 перекатываний он оказался в точности на исходном месте. Докажите, что треугольник – равнобедренный.
в) В строке чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 за один ход разрешено поменять местами любые два числа. Можно ли переставить числа в обратном порядке ровно за 100 ходов?

7. а) На две клетки шахматной доски выставляются черная и белая фишки. Разрешается по очереди передвигать их, каждым ходом сдвигая очередную фишку на любое свободное соседнее поле по вертикали или горизонтали. Может ли случиться, что после нескольких ходов все возможные расположения этих двух фишек на доске встретятся ровно по одному разу?
б) А если разрешается двигать фишки в любом порядке (не обязательно по очереди)?

Синхронные маячки

Если два параметра синхронно меняют сосотояние на противоположное, то совпадение/несовпадение их состояний – инвариант.

8. На плоскости лежал куб. Его перекатили несколько раз (через ребра) так, что куб снова оказался на исходном месте той же гранью вверх. Могла ли при этом верхняя грань повернуться на 90° относительно своего начального положения?

Для самостоятельного решения

Чрд1. Сто номерков выложили в ряд в порядке возрастания: 00, 01, 02, 03,..., 99. Затем номерки переставили так, что каждый следующий номерок стал получаться из предыдущего увеличением или уменьшением ровно одной из цифр на 1 (например, после 29 может идти 19, 39 или 28, а 30 или 20 – не может). Какое наибольшее число номерков могли остаться на своих местах?

Чрд2. а) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу – белые, вверху – черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые – вверху?
б) Тот же вопрос для доски 7×7.

Чрд3. Секретный объект представляет собой в плане квадрат 8×8, разбитый коридорами на квадратики 1×1 м. В каждой вершине такого квадратика – выключатель. Щелчок выключателя действует сразу на все выходящие из этой вершины метровые коридоры, меняя их освещенности на противоположные. Сторожгном находится в углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать выключателями любое число раз. Может ли он добиться того, чтобы от любого выключателя к любому другому он мог пройти не щелкая выключателями?

Чрд4.10 лмышат образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый час в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

Чрд5. Клетки шахматной доски занумерованы числами от 1 до 64 так, что соседние номера стоят в соседних (по стороне) клетках. Какова наименьшая возможная сумма номеров на диагонали?