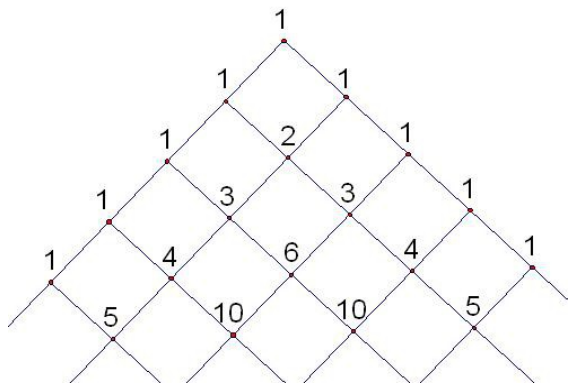


## Бином Ньютона

16 июля

Построим сетку показанную на рисунке. Посчитаем для каждого узла количество вариантов добраться до него из верхнего узла, при условии, что каждый раз можно ходить либо вправо-вниз, либо влево-вниз. Эту конструкцию называют *треугольником Паскаля*.



Также будем нумеровать строки с нуля, т.е. строка (1,2,1) будет второй.

**Упр1.** Напишите шестую и восьмую строки треугольника Паскаля.

**Зад2.** Докажите следующие равенства опираясь на треугольник Паскаля.

а)  $C_n^k = C_n^{n-k}$

б)  $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

в)  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

г)  $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$

**Упр3.** Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок, но до приведения подобных в

а)  $(a+b+c+\dots+i+j)(k+l+\dots+u+z)$ ;

б)  $(a+b)^{10}$ ?

**Упр4.** Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок и приведения подобных в

а)  $(x^2+x+1)^{10}$ ;

б)  $(a+b)^n$ ?

**Теорема 5 (бином Ньютона)**

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

**Упр6.** Выпишите формулы для

а)  $(a+b)^4$  ;

б)  $(x+1)^n$ ;

в)  $(a-b)^n$  .

**Зад7.** Докажите следующие свойства *биномиальных коэффициентов* алгебраически

а)  $C_n^k = C_n^{n-k}$  ;

б)  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ ;

в)  $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ ;

г)  $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ ;

д)  $kC_{n-1}^{k-1} = nC_n^k$ .

**Упр8.** Найдите значение выражения

а)  $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n$ ;

б)  $C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - \dots + (-2)^n C_n^n$ .

**Зад9.** Пусть  $p$  – простое. Докажите, что

а) если  $1 \leq k \leq p-1$ , то  $C_p^k : p$ ;

б)  $(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$ ;

в)  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p \equiv_p a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$ ;

г) (малая теорема Ферма)  $(n^p - n) : p$  при любом целом  $n$ .

**Зад10.** Докажите, что

а)  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;

б)  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .

**Теорема 11.**

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

*Для самостоятельного решения*

**БН1.** Докажите, что произведение  $k$  последовательных целых чисел делится на  $k!$

**БН2.** Докажите, что  $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ .

**БН3.** Докажите, что  $1^k + 2^k + \dots + n^k = \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}$  при целых  $n$ ,  $k \geq 0$

**БН4.** Докажите, что  $C_{2n}^n : (n+1)$ .