Процессы: полуинвариант

15 июля

1. На Архипелаге Сыщик гоняется за Шпионом. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном осторове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам. Как Сыщику поймать Шпиона?

2. На доске написаны несколько натуральных чисел. Каждую минуту выбирают какие-то два из них (x и y) и заменяют их на числа x–2 и y+1. Докажите, что рано или поздно на доске появится отрицательное число.

3. **а)** На шахматной доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать? **б)** Королю разрешили еще ходить вправо-вниз по диагонали. Докажите, что он может сделать лишь конечное число ходов.

4. **а)** От прямоугольника 2012×24 отрезают прямым разрезом по квадрату, пока не останется квадрат. Найдите размер этого последнего квадрата.

б) От прямоугольника m×n (где m и n – целые) отрезают прямым разрезом по квадрату. Докажите, что рано или поздно останется квадрат и найдите его размер.

5. **а)** В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше чем минусов.

б) В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять все знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.

в) В клетках таблицы 99×99 расставлены числа (не обязательно целые). Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять все знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.

6. В строке в беспорядке записаны числа 1, 2,…, 100. Петя находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами.
а) Докажите, что рано или поздно числа расположаться по порядку1, 2,…, 100.
б) Какое наибольшее число ходов могут продолжаться перестановки?

7. **а)** Докажите, что если отрезки AB и CD пересекаются, то $AC + BD < AB + CD$.

б) Из всех замкнутых ломаных с вершинами в данных точках выбрали самую короткую. Докажите, что эта ломаная несамопересекающаяся.

8. Есть куча из n камней. Разрешается заменять кучу на любое количество куч с меньшим количеством камней (возможно, различным в разных кучах). Докажите, что наступит момент, когда уже нельзя будет сделать ни одной такой операции.

9. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны.

Для самостоятельного решения

Пи1. На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.

Пи2. В год выборов на Украине все города подняли над ратушами флаги – голубые либо оранжевые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

Пи3. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое количество пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах – k-ой и (k+1)-ой, приходят к выводу, что они мешают друг другу и переселяются соответственно в (k–1)-ю и (k+2)-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

Пи4. Компания зрителей купила все билеты в один ряд, но села туда наугад, причем каждый оказался не на своем месте. Билетер может поменять местами любых двух соседей, сидящих не на своих местах, и так много раз (но не может пересаживать зрителя, уже попавшего на свое место). Верно ли, что при любой начальной рассадке билетер может действовать так, чтобы все расселись по своим местам?