Площади и отношения.

14 июля

Символом $S(...)$ будет обозначаться площадь фигуры, стоящей в скобках.

Упр1. а) Точка C_1 лежит на отрезке AC_2. Докажите, что $\frac{S(ABC_1)}{S(ABC_2)}=\frac{AC_1}{AC_2}$.

б) Точка A лежит на отрезке C_1C_2. Докажите, что $\frac{S(ABC_1)}{S(ABC_2)}=\frac{AC_1}{AC_2}$.

в) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что $\frac{S(ABC)}{S(ACD)}=\frac{BO}{OD}$

г) Дан невыпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямые, содержащие его диагонали, пересекаются в точке O. Докажите, что $\frac{S(ABC)}{S(ACD)}=\frac{BO}{OD}$

д) В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ $\angle A_1=\angle A_2$. Докажите, что $\frac{S(A_1B_1C_1)}{S(A_2B_2C_2)}=\frac{A_1B_1\cdot A_1C_1}{A_2B_2\cdot A_2C_2}$.

е) В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ $\angle A_1+\angle A_2=180^\circ$. Докажите, что $\frac{S(A_1B_1C_1)}{S(A_2B_2C_2)}=\frac{A_1B_1\cdot A_1C_1}{A_2B_2\cdot A_2C_2}$.

Упр2. Докажите, что отношение двух сторон треугольника равно отношению отрезков, на которые биссектриса делит третью сторону.

Упр3. а) Две параллельные прямые высекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2. Докажите, что треугольники OA_1B_2 и OA_2B_1 равновелики.
б) Две параллельные прямые высекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2. Докажите, что $\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{OA_2}{OB_2}$.
в) *(Теорема Фалеса)* Три параллельные прямые пересекают стороны угла в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Упр4. Две прямые высекают на сторонах угла с вершиной O отрезки A_1A_2 и B_1B_2. При этом $\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{OA_2}{OB_2}$. Докажите, что прямые параллельны.

Упр5. На сторонах угла с вершиной O отмечены точки A_1, A_2 и B_1, B_2. При этом $\frac{OA_1}{OA_2}=\frac{OB_1}{OB_2}=k$. Найдите отношение $\frac{S(OA_1B_1)}{S(OA_2B_2)}$.

Зад1. На стороне AB треугольника ABC сидит киллер. Он начинает бежать параллельно стороне BC до стороны AC, затем параллельно стороне AB до стороны BC, затем параллельно стороне AC до стороны AB, и так далее. Докажите, что через несколько таких шагов киллер вернется в исходную точку, и найдите, сколько шагов ему на это потребуется (ответ может зависеть от исходного положения киллера на AB).

Зад2. В треугольнике ABC провели медиану AM, а затем – биссектрисы MK и ML полученных треугольников AMB и AMC соответственно. Докажите, что отрезки KL и BC параллельны.

Упр6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь $ABCD$, если $S_{ABD} = 10$ см^2, $S_{ACD} = 9$ см^2, $S_{AOD} = 6$ см^2.

Зад3. В треугольнике ABC выбрана точка O. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=1$.

Зад4. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ сторона AB параллельна диагонали CE, а сторона BC параллельна диагонали AD. Докажите, что прямая BE делит диагональ AD в таком же отношении, в каком прямая BD делит диагональ CE.

Для самостоятельного решения

Пло5. Внешняя биссектриса угла A неравнобедренного треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

Пло6. Вершины A, B, C треугольника соединены с точками A_1, B_1, C_1, лежащими на противоположных сторонах (не в вершинах). Могут ли середины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 лежать на одной прямой?

Пло7. Длины оснований трапеции равны m см и n см (m и n - натуральные числа, m не равно n). Докажите, что трапецию можно разрезать на равные треугольники.

Пло8. Отрезки AB и CD не параллельны и не пересекаются. Точка P лежит на отрезке AB, а точка Q – на отрезке CD. Точки K, L, M и N – середины отрезков AQ, BQ, CP и DP соответственно. Докажите, что отрезки KL, MN и PQ пересекаются в одной точке.

Пло9. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1, C_2, сторону BC - в точках A_1, A_2, сторону CA - в точках B_1, B_2. Известно, что перпендикуляры к сторонам AB, BC, CA, восставленные соответственно в точках C_1, B_1, A_1, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к сторонам AB, BC, CA, восставленные соответственно в точках C_2, B_2, A_2, также пересекаются в одной точке.