

Комбинаторика

14 июля

Упр1. Среди 12 школьников требуется выбрать дежурных на ближайшие шесть дней – на каждый день по дежурному. Сколько существует различных выборов?

Упр2. Сколькими способами можно выбрать из слова «лмышнонок» пару из гласной и согласной букв?

Упр3. У скольких 10-значных чисел все цифры различны?

Упр4. Среди 12 школьников требуется выбрать шесть футболистов. Сколько существует различных выборов?

Обозначение. x в убывающей степени k

$$x^k = x(x-1)\dots(x-k+1) \text{ (всего } k \text{ сомножителей).}$$

Упр5. Вычислите или упростите: а) 101^3 ; б) $0,5^4$; в) 10^{15} ; г) k^k , где k – натурально.

Определение. Числом размещений из n элементов по k называется количество способов выписать в строчку k разных чисел из данных n (строчки, отличающиеся порядком, считаются разными). Оно обозначается A_n^k .

Теорема 6. $A_n^k = n^k$.

Определение. Числом сочетаний из n элементов по k называется количество способов выбрать k чисел из чисел от 1 до n (наборы, отличающиеся лишь порядком, считаются одинаковыми). Оно обозначается C_n^k .

Упр7. Сколько размещений можно сделать из одного сочетания по k элементов?

Теорема 8. $C_n^k = \frac{n^k}{k^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Упр9. На окружности отмечены 5 красных, 7 желтых и 9 зеленых точек. Сколько есть треугольников в этих точках, у которых все вершины а) зеленые; б) одноцветные; в) все разноцветные; г) не все одноцветные?

Зад10. Сколько различных строк можно получить, переставляя буквы в словах а) ПЕРЕГОРОДКА; б) МАТЕМАТИКА?

Зад11. Для проведения вступительной олимпиады преподаватели разбивают 70 школьников следующим образом: список в алфавитном порядке разбивается на 4 части, первая идет в первую аудиторию, вторая – во вторую и т. д. При этом в каждую аудиторию отправляется хотя бы один школьник. Сколькими способами можно произвести распределение?

Зад12. Сколько решений имеет уравнение $x+y+z=2008$ а) в натуральных числах; б) в целых неотрицательных числах?

Зад13. Преподаватели снова делят 70 школьников на 4 аудитории, но в этот раз без учета алфавитного порядка. Найдите число способов.

Зад14. Хромая ладья ходит на 1 клетку вправо или на 1 клетку вверх. Занумеруем столбцы слева направо, а строки снизу вверх числами 0, 1, 2, 3. Найдите количество путей, ведущих из левой нижней клетки в клетку на пересечении m -го столбца и n -ной строки.

Зад15. Сколько решений в нечетных натуральных числах имеет уравнение $x+y+z+t=2000$?

Для самостоятельного решения

К1. Сколькими способами можно расставить k ладей на доске $N \times N$ так, чтобы они не били друг друга?

К2. Сколько есть решений уравнения $x+y+z=100$ в натуральных числах от 1 до 60?

К3. Сколькими способами можно расставить числа 1, 2, ..., 20 в строку так, чтобы каждое число, кроме единицы, было больше по крайней мере одного из своих соседей?

К4. Сколькими способами можно разбить неподвижный клетчатый прямоугольник $2 \times N$ на двуклеточные доминошки?