

Двудольные графы

14 июля

Подсчет ребер двумя способами

Зад1. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. 17 человек любят играть в матбой, и в классе 15 парт. Сколько всего ребят в классе?

Зад2. В прошлом учебном году в городе прошли такие мат.олимпиады: городская, областная, и турнир городов. В каждой из них участвовало нечетное число учеников маткласса, причем каждый из участников побывал на нечетном числе олимпиад. Всего в матклассе 20 учеников. Докажите, что кое-кто из них не был ни на одной олимпиаде.

Определения. Граф – *двудольный*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета.

Свойства двудольных графов.

Зад3. Равны суммы степеней вершин каждого цвета.

Зад4. Если степени всех вершин равны, то вершин каждого цвета поровну.

Максимальное число ребер

Зад5. (*Полный двудольный граф*) Каково наибольшее число ребер в двудольном графе **а)** с b белыми и r черными вершинами; **б)** с $2n$ вершинами; **в)** с $2n+1$ вершиной?

Зад6. В строке из 11 целых чисел для каждой группы подряд идущих чисел (включая группы из одного числа тоже) подсчитана ее сумма. Каково наибольшее количество нечетных сумм?

Правильная раскраска в два цвета. Нечетные циклы.

Зад7. Несколько равносторонних треугольников на плоскости не перекрываются. Всегда ли можно раскрасить их в два цвета так, чтобы треугольники с общим отрезком границы были разного цвета?

Лемма 8. Дерево – двудольный граф.

Теорема 9. (*критерий двудольного графа*) Граф – двудольный \Leftrightarrow в графе нет нечетных циклов.

Зад10. Для каких графов можно в вершинах расставить натуральные числа так, чтобы на каждом ребре одно число делилось на другое, а для всех остальных пар чисел такого не было?

Для самостоятельного решения

ДГ1. Вершины графа – шестизначные числа. Два числа связаны ребром, если у них на пяти позициях цифры совпадают, а на одной отличаются на 2. Двудольен ли этот граф?

ДГ2. Даны 9 чисел a_1, a_2, \dots, a_9 . Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ ($i \neq j$) как минимум 29 целых. Докажите, что все числа $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_9$ – целые.

ДГ3. Вершины связного конечного графа как-то пронумеровали от 1 до n , затем на каждом ребре записали сумму номеров в его концах, а номера в вершинах стерли. Докажите, что

а) Если граф не двудольный, то нумерация однозначно восстанавливается.

б) Если нумерация однозначно не восстанавливается, то этот граф двудольный с равным количеством вершин обоих цветов.

ДГ4. а) Найдется ли правильный треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки?

б) Вершины графа – это узлы клетчатой бумаги, ребра – отрезки фиксированной длины L . Докажите, что получившийся граф – двудольный.