# Дискретная непрерывность

**11 июля**

Если путь начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то неизбежно придется переправляться. В частности, если какая-то целочисленная величина в процессе меняется на каждом шаге не больше чем на 1 (в ту или другую сторону), то она обязательно проходит через все промежуточные значения между начальным и конечным. Такая величина называется дискретной, а прием – дискретной непрерывностью.

**От меньше к больше через равно**

**1.** В ряду из 100000 натуральных чисел первое число однозначно, а каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в ряду есть число, начинающееся цифрами 2012.

**От меньше к больше через поровну**

**2.** На нижнем ряду шахматной доски стояли 8 слонов. После некоторого числа ходов все они оказались в верхнем ряду. Докажите, что был момент, когда в верхней и нижней половине слонов было поровну.

**3.** Журнал «Юный диверсант» выходит нерегулярно – два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: №1 – 2001, №2 – 2001, №3 – 2002,... Докажите, что если редакцию не поймают, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

**4.** Саша и Максим играли партию в шахматы. Максим пожертвовали ферзя и в итоге поставили мат одинокому Сашиному королю. Докажите, что в партии был момент, когда число съеденных Сашиных фигур и пешек равнялось числу Максимовых фигур и пешек на доске.

**Организуй процесс**

**5.** За круглом столом сидит 10 мальчиков и 10 девочек. Докажите, что найдется группа из 10 сидящих подряд детей, в которой девочек и мальчиков поровну.

**6.** На плоскости отмечены 10000 точек. Докажите, что найдется не проходящая через эти точки прямая, по одну сторону которой лежит ровно 2012 отмеченных точек.

**7.** На клетчатой доске 100×100 половина клеток белые, а половина – черные. Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две части с равным числом черных клеток.

**8.** На столе лежат 15 кусков сыра разного веса. Докажите, что можно разрезать один из кусков на две части и разложить сыр на две кучки равного веса по 8 кусков в каждой.

**Полезный эффект на переправе**

**9. а)** На каждой клетке шахматной доски стоит по королю – белому либо черному, причем есть короли обоих цветов. Докажите, что есть белый король, который бьет черного.
**б)** На доске 4×4 расставляются 16 шахматных коней четырех мастей: вороные, гнедые, соловые и каурые. Существует ли такая расстановка, в которой вороные не бьют соловых, соловые – гнедых, гнедые – каурых, а каурые – вороных?

**10.** Плоскость раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся точки разного цвета на расстоянии 1.

**11.** За круглым столом сидит 100 дедов, причем у любых двух соседей число волос в бороде отличается не больше чем на 100. Докажите, что найдется пара дедов, сидящих друг напротив друга, у которых число волос в бородах тоже отличается не больше, чем на 100.

**12.** Аня, Боря и Витя сидят по кругу за столом и едят орехи. Сначала все орехи у Ани. Она делит их поровну между Борей и Витей, а остаток (если он есть) съедает. Затем все повторяется: каждый следующий (по часовой стрелке) делит имеющиеся у него орехи поровну между соседями, а остаток съедает. Орехов много (больше трех). Докажите, что не все орехи будут съедены.

## *Для самостоятельного решения*

**ДН1.** Существуют 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа (например, $1001!+2$, $1001!+3$, ... , $1001!+1001$). А существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

**ДН2.** В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.

**ДН3.** Правильный 1001-угольник разбили непересекающимися диагоналями на 999 треугольников. Докажите, что среди этих треугольников по крайней мере три равнобедренных.

**ДН4.** $2n$ радиусов разделили круг на $2n$ равных секторов: $n$ синих и $n$ красных, чередующихся в произвольном порядке. В синие сектора, начиная с некоторого, записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до $n$ по порядку. В красные сектора, начиная с некоторого, записывают те же числа, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до $n$.