# ГМТ

**11 июля**

**Определение.** ГМТ – это геометрическое место точек, удовлетворяющих некоторому условию. Для доказательства того, что некоторое множество точек является ГМТ надо доказать, что каждая точка, принадлежащая множеству, подходит под условие и каждая точка подходящая под условие принадлежит множеству.

1. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите ГМТ $X$, для которых $AX + BX = CX + DX$.
2. **а)** Дан треугольник $ABC$. Найдите ГТМ $X$, лежащих внутри треугольника и таких, что площади $ABX$ и $ACX$ равны.
   **б)** Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
   (Эта точка называется *центром масс* треугольника.)
3. **а)** Найдите ГМТ, из которых данный отрезок $AB$ виден под прямым углом.
   **б)** Найдите геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку.
4. В окружности проведены все хорды данной длины. Докажите, что есть меньшая окружность которой все они касаются.
5. На двух параллельных прямых выбраны два луча. Рассматриваются прямые, отсекающие от лучей два отрезка с данной суммой длин. Докажите, что все эти прямыепроходят через одну точку.
6. **а)** Дано число $d$ и точки $A$ и $B$. Сколько точек $X$ на прямой $AB$ удовлетворяет условию $AX^2-BX^2=d$?
   **б)** Дано число $d$ и точки $A$ и $B$. Найдите ГМТ $X$ таких, что $AX^2-BX^2=d$.
   **в)** Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
   (Эта точка называется *ортоцентром* треугольника.)

***Для самостоятельного решения***

**ГМТ1.** Даны две точки $A$ и $B$. Пусть некая прямая $BX$ касается в точке $X$ некоторой окружности с центром в $A$. Найдите ГМТ $X$.

**ГМТ2.** Докажите, что биссектриса любого из внутренних углов треугольника пересекается с внешними биссектрисами двух других углов в одной точке.
(Точка называется *центром вневписанной окружности*. Таких точек три, по одной для каждого угла.)

**ГМТ3.** Дан треугольник $ABC$. Найдите ГТМ $X$ таких, что площади $ABX$ и $ACX$ равны.

**ГМТ4.** Найдите геометрическое место четвертых вершин квадратов, таких, что оставшиеся три вершины лежат на двух данных перпендикулярных прямых.

**ГМТ5.** На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ выбраны точки $C_1$, $A_1$ и $B_1$ так, что $AC_1=AB_1$, $BA_1=BC_1$ и $CA_1=CB_1$. Докажите, что перпендикуляры восстановленные в точках $C_1$, $A_1$ и $B_1$ к сторонам $AB$, $BC$ и $CA$ соответственно пересекаются в одной точке.