# Графы – 2: Ребра и компоненты, циклы, деревья

**10 июля**

**Обозначения.** Будем рассматривать конечные графы с В вершинами, Р рёбрами и К компонентами связности.

**Зад1.** В Огогондии 2012 городов. Президент издал указ связать их железными дорогами в единую сеть. Каждая ветка связывает два города, не пересекаясь с другими ветками. Докажите, что всего понадобится не менее 2011 веток.

**Теорема 2** *(о числе ребер связного графа)*.
**а)** Р≥В–К.
**б)** В связном графе Р≥В–1.

**Зад3.** Из спичек сложили квадрат, разбитый линиями из спичек на 64 квадратных поля со стороной в одну спичку. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы с любого поля на любое другое можно было пройти, не перепрыгивая через спички?

**Зад4.** Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую?

**Зад5.** Есть $n$ камней разного веса. За одно взвешивание можно сравнить любые два камня между собой. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка найти самый тяжелый?

**Определения.** *Циклом* называется замкнутый путь по ребрам графа без повторяющихся ребер. *Деревом* называется связный граф без циклов.

**Теорема 6** *(свойства деревьев)*.
**а)** В дереве Р=В–1.
**б)** Если в связном графе Р=В–1, то это – дерево.

**Упр7.** Докажите, что если в графе порядка $n$ есть не менее $n$ ребер, то в нем есть цикл.

**Зад8.** В указе президента из зад1 перечислены 2011 дорог. Докажите, что их можно строить по одной так, чтобы в любой момент любые два города, уже стоящих на дороге, были связаны железнодорожным маршрутом.

**Зад9.** Многоугольник на клетчатой бумаге составлен из $n$ клеток. Докажите, что его периметр $\leq 2n+2$.

**Зад10.** В связном графе между любыми двумя вершинами есть маршрут из не более чем трех ребер, а степень каждой вершины не более, чем 4. Докажите, что в графе не более 53-х вершин.