Разложение на множители

09 июля

0. *Р3-19(для обсуждения) В таблицу 3×3 вписаны 9 натуральных чисел так, что суммы во всех строках равны между собой, и произведения в столбцах тоже равны между собой. Могут ли все 9 вписанных чисел быть разными?*

1. **а)** Числа от 3 до 6 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?
б) Тоже для чисел от 1 до 10.

2. Натуральное число возвели в степень и получили девятизначное число, в записи которого используются все цифры, кроме 3. В какую степень могли возвести?

3. Дано 28 различных натуральных чисел, меньших 100. Докажите, что у каких-то двух из них есть общий делитель больше 1.

4. Можно ли расставить по кругу 333 различных натуральных числа так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

5. Найдите НОК(1, 2, …, 100)/НОК(51, 52,…, 100).

Определение. Произведение последовательных чисел от 1 до *n* называется *n*-факториал и обозначается *n*! (1 . 2 . 3 . ... . *n* = *n*!). В частности, 1!=0!=1, 2!=2, 3!=6, 4!=24.

6. Найдите НОД(99!+100!, 101!).

7. Можно ли вычеркнуть из произведения 1! . 2! . 3! . ... . 56! один из факториалов так, чтобы произведение оставшихся было квадратом целого числа?

8. Докажите, что НОК(a, b) НОД(a, b) = ab.

9. Назовём натуральные числа a и b друзьями, если их произведение является точным квадратом. Докажите, что если a – друг b, то a – друг НОД(a, b).

10. **а)** abc = НОК(a, b, c) НОД(ab, ac, bc);
б) abc = НОД(a, b, c) НОК(ab, bc, ac).

11. Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

12. Докажите, что в вершинах любого графа можно расставить натуральные числа так, чтобы любые два числа, соединенные ребром, имели НОД>1, а числа, не соединенные ребром, были взаимно просты.