Площади

09 июля

Свойства площадей.
1. Площадь неотрицательна.
2. Площадь целого равна сумме площадей частей.
3. Равные фигуры имеют равные площади.
4. Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

Лемма 0. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов.

Теорема 1. Площадь треугольника равна половине произведения стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

Теорема 2. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна произведению стороны AD на расстояние между прямыми AD и BC.

Теорема 3. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Упр4. Докажите, что
а) медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника;
б) три медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

ЗадР1-5.*(Разобрать.) Внутри равностороннего треугольника выбрана точка, и из нее опущены перпендикуляры на все три стороны. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров не зависит от выбора точки.*

Зад5. Существует ли такой треугольник, что
а) все его стороны больше 1 км, а площадь меньше 1 см^2;
б) все его высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 км^2;
в) все стороны треугольника меньше 1 см, а его площадь больше 1 см^2.
Зад6. **а)** Через каждую вершину выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная его диагонали. Докажите, что полученный параллелограмм по площади вдвое больше четырехугольника.
б) Середины соседних сторон выпуклого четырехугольника соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырехугольника вдвое меньше площади данного.
Зад7. В выпуклом четырехугольнике диагональ делит отрезок, соединяющий две середины противоположных сторон, пополам. Докажите, что эта диагональ делит площадь четырехугольника пополам.
Зад8. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что AD параллельна BC $\Leftrightarrow$ треугольники ABO и CDO равновелики.
Зад9. а) Преподаватель и школьник делят квадратный пирог. Преподаватель отмечает внутри пирога точку, а школьник соединяет ее отрезками со всеми вершинами квадрата и забирает себе любые два куска, не имеющие общих сторон. Как должен действовать преподаватель, чтобы получить побольше пирога?
б) Внутри квадрата отметим две точки и соединим их отрезками со всеми вершинами (см. рис. 1). Могут ли все девять полученных частей иметь одинаковую площадь?

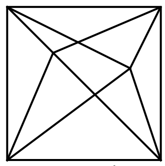
рис.1

Теорема 10. а) Площадь треугольника равна половине произведения периметра на радиус вписанной окружности.
б) Площадь описанного многоугольника равна половине произведения периметра на радиус вписанной окружности.
Неравенства площадей.
Зад11. Докажите, что

а) площадь треугольника со сторонами a, b, c не превосходит $\frac{ab}{2}$;

б) площадь четырехугольника с диагоналями p и q не превосходит $\frac{pq}{2}$.

Зад12. Внутри выпуклого многоугольника лежит круг. Докажите, что площадь многоугольника не менее половины произведения радиуса круга на периметр многоугольника.

Для самостоятельного решения

Пло1. Докажите неравенства для площади четырехугольника (a, b, c, d – стороны по порядку): а) $S \le \frac{ab+cd}{2}$ б) $S \le \frac{ac+bd}{2}$.

Пло2. Квадрат разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке (см. рис. 2). При этом оказалось, что общая площадь черных прямоугольников равна площади белых прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно переместить так, что все черные прямоугольники составят один прямоугольник.

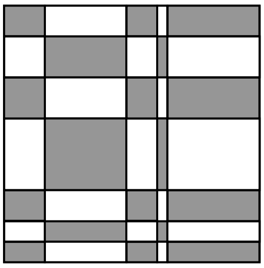

рис 2

Пло3. Стороны прямоугольника на шахматной доске параллельны сторонам доски. Докажите, что разность суммарных площадей белых и черных частей прямоугольника не превосходит площади одной клетки.

Пло4. (Принцип Кавальери) **а)** На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника и прямая. Известно, что любая прямая, параллельная данной, пересекается с многоугольниками по отрезкам раной длины. Докажите, что эти многоугольники равновелики.

б) Докажите, что два равновеликих прямоугольника можно расположить на плоскости так, что они будут пересекаться по равным отрезкам с любой прямой, параллельной данной.