Разнобой 3

07 июля

19. В таблицу 3×3 вписаны 9 натуральных чисел так, что суммы во всех строках равны между собой, и произведения в столбцах тоже равны между собой. Могут ли все 9 вписанных чисел быть разными?

20. Есть набор гирек 1,2,3,...,50 г и чашечные весы. Двое играющих по очереди кладут на весы по одной гирьке из набора, каждый на свою чашу. После хода чаша должна перевесить. Кто *не может* сделать хода – выигрывает. Кто из игроков может всегда выигрывать независимо от игры соперника?

21. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на два меньших треугольника и провести в них по медиане так, чтобы эти медианы были равны.

22. Дано: $ABCD$ – прямоугольник, M – середина стороны CD, H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую AM. Докажите, что треугольник BCH – равнобедренный.

23. На плоскости отмечены несколько (больше трех) точек. Известно, что если выкинуть любую точку, то оставшиеся будут симметричны относительно какой-нибудь прямой. Верно ли, что всё множество точек тоже симметрично относительно какой-нибудь прямой?

24. x и y – натуральные числа. Докажите, что если десятичная запись числа x^2+xy+y^2 оканчивается нулем, то она оканчивается по крайней мере двумя нулями.

25. Алина задумала натуральное число n от 1 до 100. Саша может назвать любое натуральное число c (в том числе числа больше 100). Если c совпало с n, то Алина сообщает, что игра закончилась и Саша выиграл. Если нет, то Алина меняет свое число на n/c если n делится на c или на $nc+1$ если n на c не делится (при этом не сообщая Саше, что именно она сделала), и предлагает Саше сделать следующий ход. Есть ли у Саши способ гарантированно выиграть не позднее 100-го хода?