

Графы – 1: определения, лемма о рукопожатиях, связность

07 июля

Определение 1. Скажем, что задан *граф*, если задано множество его *вершин* и про любую пару вершин сказано, *связаны* они *ребром* или нет (будем рассматривать только пары из двух различных вершин). Граф *конечный*, если число вершин в нем конечно.

Определение 2. Граф шахматной фигуры (ладьи, коня, слона, ферзя, короля): вершины – поля доски (можно рассматривать и бесконечные доски), рёбра – пары вершин, соединённых ходом этой фигуры.

Упр1. Сколько всего ребер в графе ладьи?

Упр2.

Каково наибольшее возможное число ребер в графе с n вершинами?

Определение 3. *Степень* вершины – это число выходящих из нее ребер.

Упр3. Какова наибольшая степень вершины в графах а) коня; б) ферзя?

Упр4. Сколько всего ребер в графе короля?

Лемма 1. Сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер.

Лемма 2 (о рукопожатиях). В конечном графе число вершин нечетной степени – четно.

Упр5. Верна ли лемма о рукопожатиях для бесконечного графа?

Определение 3. Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами есть *путь (маршрут)* по ребрам (как по дорогам).

Упр6. При каких n граф коня на доске $n \times n$ не связный?

Упр7. В стране 15 городов, каждый из которых соединен авиалиниями не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно самолетом добраться до любого другого (возможно, с пересадками).

Определение 4. *Подграф*, состоящий из всех вершин, связанных с данной маршрутом, и всех ребер, входящих в такие маршруты, называется *компонентой связности*.

Упр8. На сколько компонент связности распадается

а) граф слона на доске 8×8 ?

б) граф коня на доске 2×100 ?

Упр9. Из связного графа удалили 3 ребра (оставив, однако, вершины на их концах). На какое наибольшее число компонент связности мог распасться граф?

Зад1. а) В стране из столицы выходит 99 дорог, из деревни Нью-Васюки – одна, а из всех остальных городов – по 100 дорог. Докажите, что из столицы по дорогам можно попасть в Нью-Васюки.

б) В связном графе степень каждой вершины четна. Одно ребро удалили (оставив, однако, вершины на его концах). Докажите, что граф остался связным.

Зад2. В стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что:

а) одним из этих видов транспорта можно добраться (напрямую или с пересадками) из любого города в любой другой;

б) для каждого города можно выбрать свой вид транспорта так, чтобы при помощи него можно было бы добраться из этого города до любого другого, совершив не более одной пересадки;

в) одним из этих двух видов транспорта можно добраться из любого города в любой другой, совершив не более двух пересадок.

Зад3. Поля клетчатой доске $n \times n$ покрасили в красный и синий цвета и рассмотрели граф ферзя только с синими вершинами и граф ферзя только с красными. Докажите, что хотя бы один из этих графов связан.