Разнобой 1

05 июля

1. Расстояние между Кировом и Москвой составляет 913 км. Вдоль дороги между ними расставлены километровые столбы. На первом из них стоят числа 1 и 912, на втором – 2 и 911 и так далее, на последнем – 912 и 1. Столб называется хорошим, если два написанных на нем числа имеют общий делитель, отличный от единицы. Сколько хороших столбов стоит вдоль дороги?

2. На прямой расположены несколько отрезков, любые два из них имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.

3. Найдутся ли два различных действительных числа, у которых равны полусумма, произведение и одно из частных?

4. а) Есть 4 серебряных монеты и две золотые. Известно, что среди серебряных монет одна фальшивая и среди золотых одна фальшивая. Все настоящие весят одинаковы, фальшивые легче настоящих и тоже весят одинаково. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь выявить обе фальшивые монеты?
б) Есть 13 серебряных монет и две золотые. Известно, что среди серебряных монет одна фальшивая и среди золотых одна фальшивая. Все настоящие весят одинаковы, фальшивые легче настоящих и тоже весят одинаково. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выявить обе фальшивые монеты?

5. Внутри равностороннего треугольника выбрана точка, и из нее опущены перпендикуляры на все три стороны. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров не зависит от выбора точки.

6. Дана клетчатая сетка квадрата 4×4 (40 единичных отрезков). Можно ли ее разбить на
а) 5 ломаных длины 8;
б) 8 ломаных длины 5?

7. В Анчурии прошли выборы президента, на которых за выигравшего кандидата (то есть, получившего более половины голосов) проголосовало 99% малограмотного населения и 1% грамотного населения. Докажите, что если бы перед выборами расстреляли всего лишь 35% грамотного населения, то этот кандидат набрал бы более 60% голосов.

8. а) Можно ли в расставить по кругу 99 натуральных чисел так, чтобы в каждой паре соседних чисел одно из чисел делилось на другое, а во всех остальных парах такого не было?
б) Можно ли в клетках таблицы 4×4 расставить натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел с общей стороной или вершиной одно из чисел делилось на другое, а во всех остальных парах такого не было?

9. Комплект из 28 доминошек положили на шахматную доску так, что каждая доминошка накрыла ровно 2 клетки, а 8 клеток остались непокрытыми. Могло ли оказаться, что для каждой пары клеток с общей стороной, покрытых половинками разных доминошек, число точек на этих половинках было одинаково?