9: Определители

Определение. Ориентированная площадь $S(v_1, v_2)$ – это ± площадь параллелограмма, натянутого на векторы v_1, v_2. Если кратчайший поворот от v_1 к v_2 против часовой, то знак +, иначе –.

Ориентированный объем $V(v_1, v_2, v_3)$ – это ±объем параллелепипеда, натянутого на векторы v_1, v_2, v_3. Если тройка v_1, v_2, v_3 правоориентирована, то знак +, иначе –.

Задача 1. Пусть функция f равна S или V. Докажите следующие свойства f:

a) f линейна по каждой переменной, то есть $f(\ldots, al+bl', \ldots)=a\cdot f(\ldots,l,\ldots)+ b\cdot f(\ldots,l',\ldots)$.

b) f кососимметрична по каждой паре переменных, то есть $f(\ldots,l,\ldots,l',\ldots) = -f(\ldots,l',\ldots,l,\ldots)$

c) $S((1,0), (0,1)) = 1$, $V((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))=1$.

Задача 2. Найдите явное выражение для S и V через координаты векторов.

Задача 3. Координаты вершин многоугольника (по порядку) равны (x_1, y_1), (x_2,y_2), …, (x_n,y_n). Докажите, что ориентированная площадь многоугольника равна

$$\tfrac{1}{2}(x_1(y_2-y_n)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_4-y_2)+\ldots+x_n(y_1-y_{n-1}))$$

Определение. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не 0.

Упр 4. Докажите, что матрица невырождена ⇔ ее строки линейно независимы.

Определение. Минор A_{ij} квадратной матрицы A – это определитель меньшей матрицы, полученной из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Задача 5. Докажите правило вычисления определителя методом разложения

a) по i-й строке $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$: $\det(A)=(-1)^{i+1}b_1A_{i1}+(-1)^{i+2}b_2A_{i2}+\ldots+(-1)^{i+n}b_nA_{in}$

b) по j-му столбцу $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$: $\det(A)=(-1)^{j+1}b_1A_{1j}+(-1)^{j+2}b_2A_{2j}+\ldots+(-1)^{j+n}b_nA_{nj}$

Определение. *Транспонированная матрица* A^t получается из матрицы A симметрией относительно главной диагонали (то есть строки A становятся столбцами A^t и наоборот).

Задача 6. Докажите, что **a)** если матрица А – квадратная, то $\det(A)=\det(A^t)$

b) если строки квадратной матрицы линейно независимы, то столбцы – тоже.

Задача 7. a) Пусть $l=a_1l_1+a_2l_2+\ldots+a_nl_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – числа, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ – n линейно независимых элементов из Λ^1_n. Докажите, что $a_i=\det(l,l_1,\ldots,l_{i-1},l_{i+1},\ldots,l_n)/\det(l_1, l_2, \ldots, l_n)$

b) Дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=c_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=c_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=c_n \end{cases}$$

Докажите *правило Крамера*: если не равен нулю Δ – определитель матрицы системы (без свободных членов), то $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Следствие 8. Система линейных уравнений с невырожденной матрицей имеет единственное решение при любом наборе свободных членов.

Определение. Квадратная матрица A называется *симметрической*, если $A^t=A$ и *кососимметрической*, если $A^t=-A$.

Упр 9. Докажите, что у невырожденной кососимметрической матрицы – четный размер.

Упр 10. Все элементы квадратной матрицы – целые числа. Известно, что в каждой строке и каждом столбце ровно одно число не делится на 5. Докажите, что определитель этой матрицы не равен 0.

Задача 11. a) Докажите, что квадратная матрица четного размера над $\mathbf{Z}_2$, у которой по диагонали стоят нули, а в остальных местах единицы – невырождена.

b) Докажите, что квадратная матрица четного размера, у которой по диагонали стоят нули, а в остальных местах 1 или –1 в любом наборе – невырождена.

Для самостоятельного решения

A19. После завершения однокругового турнира выяснилось, что для любой группы команд есть команда, сделавшая с командами этой группы нечетное число ничьих. Докажите, что, что общее число команд в турнире – четно.

A20. Есть 10 бананов и чашечные весы без гирь. За какое наименьшее число взвешиваний можно проверить, все ли бананы весят одинаково?

A21. Докажите, что в любой (прямоугольной) матрице наибольшее количество линейно независимых строк равно наибольшему количеству линейно независимых столбцов.

www.ashap.info/Uroki/KirovLMSH/2007/index.html