

**Двадцать третья Летняя многопредметная школа
Кировской области**

Wish Kill, 3-28 июля 2007 г. 10 класс, группа “профи”

8: Алгебра Грассмана

Определение. $\Lambda_n = \Lambda(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ – алгебра, порожденная n антикоммутирующими переменными (т.е. $\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$ для любых i и j). В остальном действуют такие же правила сложения и умножения между собой и на число, как и в кольце обычных многочленов.

Упр 1. Докажите, что $\xi_i^2 = 0$ для всех i .

Упр 2. Какова наибольшая степень одночлена?

Определение 1. Λ_n^k – множество всех однородных многочленов степени k . Элементы Λ_n^1 будем обозначать l_i .

Упр 3. Докажите, что Λ_n^k – векторное пространство и найдите его размерность.

Упр 4. Найдите $(a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 + d\xi_4 + e\xi_5)^2$, где a, b, c, d, e – обычные числа.

Упр 5. Произведение n элементов из Λ_n^1 равно $a\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$, где a – какое-то число.

Определение 2. Назовем однородные многочлены четной степени *четными* элементами, а нечетной степени – *нечетными*. Остальные элементы *не имеют четности*. 0 считаем одновременно четным и нечетным.

Упр 6. Всякий элемент однозначно представляется в виде суммы четного и нечетного.

Предл 7. а) Четный элемент A коммутирует с любым другим элементом D , то есть $AD = DA$. б) Любые два нечетных элемента B и C между собой антикоммутируют, то есть $BC = -CB$.

Предл 8. Если $l_1, l_2, \dots, l_k$ – линейно зависимы, то $l_1 l_2 \dots l_k = 0$

Теорема 9. Если $l_1, l_2, \dots, l_n$ – линейно независимы, то $l_1 l_2 \dots l_n \neq 0$

Следствие 10. Если $l_1, l_2, \dots, l_k$ – линейно независимы, то $l_1 l_2 \dots l_k \neq 0$

Определение 3. *Определитель* упорядоченной n -ки $\det(l_1, l_2, \dots, l_n)$ – это числовой коэффициент перед $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ в произведении $l_1 l_2 \dots l_n$.

Определение 4. Будем сопоставлять строке $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ элемент $a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_n \xi_n$. Тогда квадратной матрице (таблице) A размера $n \times n$ сопоставляется упорядоченная n -

ка элементов из Λ_n^1 . Определитель этой n -ки и будем считать определителем матрицы A .

Упр 11. Напишите явную формулу для определителей матриц 2×2 и 3×3 .

Упр 12. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix} \text{ с нулями под главной диагональю.}$$

Теорема 13. Докажите следующие свойства определителя:

а) Определитель линеен по каждой переменной, то есть $\det(\dots, al + bl', \dots) = a \cdot \det(\dots, l, \dots) + b \cdot \det(\dots, l', \dots)$.

б) Определитель кососимметричен по каждой паре переменных, то есть $\det(\dots, l, \dots, l', \dots) = -\det(\dots, l', \dots, l, \dots)$

в) $\det(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 1$.

Задача 14. Докажите, что свойства а, б, в из теоремы 13 определяют функцию $\det$ однозначно.

Для самостоятельного решения

Задача A16. Сопоставим квадратной матрице A размера

$n \times n$ упорядоченную n -ку элементов из Λ_n^1 , где элементы соответствуют столбцам матрицы. Докажите, что определитель этой n -ки равен определителю матрицы A .

Задача A17. Докажите, что если строки квадратной матрицы линейно независимы, то столбцы – тоже.

Задача A18. а) Докажите, что если n чисел $a, b, \dots, c$ различны, то строки

$(1, 1, \dots, 1), (a, b, \dots, c), (a^2, b^2, \dots, c^2), \dots, (a^{n-1}, b^{n-1}, \dots, c^{n-1})$ линейно независимы.

б) Найдите определитель матрицы из этих строк.

www.ashap.info/Uroki/KirovLMSH/2007/index.html