Двадцать третья Летняя многопредметная школа Кировской области

Wish Kill, 3-28 июля 2007 г. 10 класс, группа “профи”

6: Построения циркулем с линейкой и без

Определение. Скажем, что число α можно *построить с помощью циркуля и линейки (построить ЦЛ)*, если на координатной плоскости, где отмечены начало координат и точка (1, 0), можно построить точку с абсциссой или ординатой α. можно отметить любую точку с рациональными координатами и уже отмечены две точки на единичном расстоянии,

Упр 0. Докажите, что можно построить ЦЛ любую точку с рациональными координатами.

Упр 1. Докажите, что множество чисел, которые можно построить ЦЛ, образует числовое поле.

Упр 2. Докажите, что если числа a и b можно построить ЦЛ, то числа а) $\sqrt{a^2+b^2}$, б) $\sqrt{a^2-b^2}$, в) $\sqrt{ab}$ можно построить ЦЛ.

Упр 3. Докажите, что можно построить ЦЛ корни любого квадратного уравнения с рациональными коэффициентами.

Упр 4. Докажите, что если числа a, b, d можно построить ЦЛ, то число $a+b\sqrt{d}$ можно построить ЦЛ.

Замечание. В следующих задачах проводятся построения при помощи только циркуля. Снова считаем, что на координатной плоскости уже отмечены точки (0, 0) и (0, 1). Будем считать, что прямая построена (задана), если построены (заданы) две точки на этой прямой.

Упр 5. При помощи одного циркуля построить а) точку, симметричную данной точке относительно данной прямой; б) отрезок, в n раз больше данного; в) отрезок, в n раз меньше данного.

Упр 6. При помощи только циркуля построить прямую, перпендикулярную к заданному отрезку и проходящую через один из его концов.

Задача 7. Даны отрезки a, b, c. При помощи одного циркуля построить отрезок $\frac{ab}{c}$.

Задача 8. Дана окружность и ее центр. При помощи одного циркуля разделить дугу данной окружности пополам.

Задача 9. Докажите, что если числа a и b можно построить при помощи одного циркуля, то числа а) $a+b$, б) $a-b$, в) ab, г) $\frac{a}{b}$, д) $\sqrt{a}$ можно построить при помощи одного циркуля.

Задача 10. Докажите, что если мы умеем строить все числа некоторого числового поля K, то
а) применение одной линейки не выведет нас за пределы этого поля; б) проведя лишь одну окружность, мы сможем построить только числа, имеющие вид $a+b\sqrt{d}$, где $a,b,d \in K$.

Определение. Назовем расширение F числового поля K *квадратичным*, если $F = K(\alpha)$, где α – действительный корень неприводимого квадратного трехчлена с коэффициентами из K.

Предложение 11. Число α можно построить ЦЛ тогда и только тогда, когда найдется конечная цепочка (башня) квадратичных расширений $Q = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_n$, такая, что $\alpha \in F_n$.

Теорема 12 *(теорема Мора-Маскерони).* При помощи одного циркуля можно выполнить все построения, которые выполнимы при помощи циркуля и линейки.

Для самостоятельного решения

А11. При помощи одного циркуля постройте точки пересечения данной окружности и данной прямой.

А12. При помощи одного циркуля постройте центр начерченной окружности.

А13 *(теорема Штейнера)* Если на плоскости начерчена окружность и отмечен ее центр, то все построения, выполнимые при помощи циркуля и линейки, могут быть выполнены при помощи одной линейки.

www.ashap.info/Uroki/KirovLMSH/2007/index.html