

**Двадцать третья Летняя многопредметная школа
Кировской области**

Wish Kill, 3-28 июля 2007 г. 10 класс, группа “профи”

5: Поле алгебраических чисел

Определение 1. *Алгебраическое число* — это действительное или комплексное число, являющееся корнем многочлена с целыми коэффициентами; остальные числа называются *трансцендентными*.

Определение 2. Иррациональное число α называется *хорошо приближаемым*, если $\forall N, n > 0$ найдется рациональное число $\frac{p}{q}$ такое, что $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Nq^n}$.

Теорема 1 (Лиувиль). Хорошо приближаемое число не может быть алгебраическим.

Определение 3. Если K и L — два поля таких, что $K \subseteq L$, то K называют *подполем* в L , а L — *расширением* K .

Предложение 2. Если K — подполе в L , то:

а) L является векторным пространством над K ($\dim_K L$ называется *степенью* расширения $K \subseteq L$).

б) Если V — векторное пространство над L , то V является векторным пространством над K .

Упр 3. а) Докажите, что если элемент алгебраичен над некоторым полем, то он алгебраичен и над любым расширением этого поля. б) Многочлен в определении алгебраичности можно считать неприводимым.

Теорема 3. Если $K \subseteq L$ — *конечное* расширение (то есть $\dim_K L$ конечна), то любой элемент из L алгебраичен над K .

Теорема 4 (о размерности башни). Пусть $K \subseteq L \subseteq M$ — расширения полей, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — базис L над K , $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ — базис M над L . Тогда $\{\alpha_i \beta_j\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ — базис M над K .

Определение 4. Если K и L — два поля таких, что $K \subseteq L$, и $\alpha \in L$ то через $K(\alpha)$ обозначают минимальное (по включению) *подполе* в L , содержащее K и α .

Предложение 5. а) $K \subseteq K(\alpha)$ — конечное расширение $\Leftrightarrow \alpha$ — алгебраический элемент.

Упр 6. Докажите, что сумма, разность и произведение алгебраических чисел тоже алгебраичны.

Теорема 7. Алгебраические числа образуют поле.

Упр8. Корень многочлена с алгебраическими коэффициентами — алгебраичен.

Теорема 9. Поле алгебраических чисел алгебраически замкнуто.

Для самостоятельного решения

A7. Подполе K в $\mathbb{C}$ таково, что всякий многочлен вида $x^n - 1$ раскладывается на линейные множители в $K[x]$. Обязательно ли K совпадает с $\mathbb{C}$?

A8. Докажите, что минимальное числовое поле, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt[5]{5}$ равно $\mathbb{Q}(\alpha)$ для некоторого α .

A9. α — корень неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена 23-й степени. Сколько подполей есть в $\mathbb{Q}(\alpha)$?

A10. Решите в целых числах $x\sqrt{5} + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt{2} = 0$