

**Двадцать третья Летняя многопредметная школа
Кировской области**

Wish Kill, 3-28 июля 2007 г. 10 класс, группа “профи”

4: Конструктивные и алгебраические числа

Определение 1. *Конструктивное число* – это действительное или комплексное число, для которого существует конечное описание, как вычислить его с любой точностью. Остальные числа называются *неконструктивными*.

Задача 1. Множество конструктивных чисел – счетно.

Теорема 2. Неконструктивные числа существуют, и их большинство!

Задача 3. Конструктивные числа образуют поле.

Определение 2. *Алгебраическое число* – это действительное или комплексное число, являющееся корнем многочлена с целыми коэффициентами; остальные числа называются *трансцендентными*.

Задача 4. Множество алгебраических чисел – счетно.

Теорема 5 (Кантор). Трансцендентные числа существуют, и их большинство!

Факт. Числа e и π – трансцендентны!

Задача 6 . Приведите пример многочлена с целыми коэффициентами, корнем которого является

а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ б) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$

Задача 7. Докажите, что каждое алгебраическое число конструктивно.

Задача 8 . Пусть x, y – алгебраические числа, q – рациональное, $x \neq 0$. Доказать, что следующие числа – алгебраические:

а) $-x$, б) $x + q$, в) $\frac{1}{x}$, г) qx , д) $\sqrt[n]{x}$, е) x^2 ж) $x\sqrt{2}$

Определение 3. Иррациональное число α называется *хорошо приближаемым*, если $\forall N, n > 0$ найдется

рациональное число $\frac{p}{q}$ такое, что $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Nq^n}$.

Задача 9. Приведите пример хорошо приближаемого числа.

Теорема 10 (Лиувилля). Хорошо приближаемое число не может быть алгебраическим.

Для самостоятельного решения

A4. а) Найдите ошибку в следующем доказательстве несчетности конструктивных чисел: «Пусть все конструктивные числа занумерованы. Укажем алгоритм получения пропущенного конструктивного числа между 0 и 1: i -й знак равен 1, если i -й знак i -го числа равен 2, иначе : i -й знак равен 2. Противоречие»

б) Приведите пример неконструктивного числа.

A5. Докажите, что число π конструктивно.

A6. Пусть x – алгебраическое число. Докажите, что числа а) $x\sqrt{2}$ б) $x + \sqrt{2}$ тоже алгебраические.