Двадцать третья Летняя многопредметная школа Кировской области

Wish Kill, 3-28 июля 2007 г. 10 класс, группа “профи”

3: Многочлены деления круга

Задача 1. а) Из центра правильного *23*-угольника ко всем его вершинам проведено по вектору. Докажите, что сумма этих векторов равна 0.

б)** Какое наименьшее число векторов можно из провести центра правильного *23*-угольника к его вершинам так, чтобы их сумма была равна 0?

Задача 2. Пусть ε – корень *n*-й степени из 1. Докажите, что

$$1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^{n-1}=\begin{cases}0 & если \quad \varepsilon\neq 1\\ n & если \quad \varepsilon=1\end{cases}.$$

Определение 1 $F_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$

Упр4. Найдите все корни многочлена $F_p(x)$.

Лемма 5. Если p – простое, то $F_p(x+1)$ неприводим в $Z\,[x]$.

Задача 6. Докажите, что если p – простое, то $F_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ неприводим в $Z\,[x]$.

Определение 2. Пусть ε – корень *n*-й степени из 1, и не является корнем никакой меньшей степени. Тогда ε – *примитивный* корень *n*-й степени из 1.

Упр 7. В поле ***C*** есть ровно $\varphi(n)$ примитивных корней *n*-й степени из 1 (где $\varphi(n)$ – *функция Эйлера*, то есть количество взаимно простых с *n* среди чисел 1, 2, ..., *n*.).

Задача 8. Докажите, что **а)** если p – простое, то $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$

б) если m и n взаимно просты, то $\varphi(mn)=\varphi(m)\,\varphi(n)$

Задача 9 а. Примитивный корень из 1 простой степени p не является корнем никакого многочлена с рациональными коэффициентами степени меньше чем $p-1$.

б. Из центра правильного p-угольника (где p – простое) к его вершинам проведены p–1 векторов. Докажите, что они линейно независимы над полем $\boldsymbol{Q}$

Определение 3. Многочлен деления круга – это $\Phi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)$, где $x_1, x_2, \ldots x_k$ – все примитивные корни n-й степени из 1.

Упр 10. Вычислите $\Phi_n(x)$ для всех n<6.

Теорема 11. $x^n - 1 = \Phi_a(x)\Phi_b(x)\ldots\Phi_c(x)$, где $a, b, \ldots, c$ – всевозможные делители n.

Упр 12. Докажите, что если p – простое, то $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$.

Задача 13. Найдите $\Phi_n(x)$ для всех n<18.

Теорема 14. Все коэффициенты $\Phi_n(x)$ – целые.

Факт. Все многочлены деления круга неприводимы в $Z[x]$.

Для самостоятельного решения

Задача 15. Докажите, что различные многочлены деления круга взаимно просты.

Задача 16. Докажите, что все коэффициенты $\Phi_n(x)$ расположены симметрично относительно середины.

Задача 17. При каких m и n многочлен $1 + x^m + x^{2m} + \ldots x^{(n-1)m}$ делится на многочлен $1 + x + \ldots + x^{n-1}$?

Задача 18. Верно ли, что все коэффициенты многочлена деления круга по модулю не больше 1?

Задача 19. Рассматриваются многочлены с целыми коэффициентами.

а) *P(x)* – неприводимый многочлен. Докажите, что найдется такой многочлен *Q(x),* что *P(Q(x))* – приводим.

б) $P(x)=x^n-1$. Доказать что найдется такой многочлен *Q(x),* что *P(Q(x))* раскладывается в произведение множителей степени меньше степени *Q(x)* (Указание. Среди отношений $\varphi(n!)/n!$ встречаются сколь угодно малые.).

www.ashap.info/Uroki/KirovLMSH/2007/index.html