

**Двадцать третья Летняя многопредметная школа
Кировской области**

Wish Kill, 3-28 июля 2007 г. 10 класс, группа “профи”

2: Неприводимые многочлены

Обозначение. Рациональные $\mathbf{Q}$, действительные $\mathbf{R}$ и комплексные $\mathbf{C}$ числа образуют поля, остатки $\mathbf{Z}_p$ по простому модулю – тоже поле, а вот целые числа $\mathbf{Z}$ и остатки по непростому модулю $\mathbf{Z}_n$ только кольца (нет деления!).

Пусть K – кольцо. Обозначим $K[x]$ множество многочленов с коэффициентами из K . В случае, когда K – поле, будем обозначать его F .

Упр 1. а) $K[x]$ – кольцо (то есть замкнуто относительно обычных операций сложения, вычитания и умножения).

б) Кольцо $F[x]$ замкнуто относительно деления с остатком.

Опр 1. Наибольшим общим делителем (НОД) двух многочленов, один из которых ненулевой, называют многочлен наибольшей степени, делящий оба этих многочлена.

Факт. НОД можно найти с помощью алгоритма Евклида.

Упр 2. Пусть многочлены $f, g \in F[x]$, $h = \text{НОД}(f, g)$ со старшим коэффициентом 1. Если все коэффициенты у f и g на самом деле лежат в меньшем поле L , то у h – тоже.

Упр 3. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с рациональными коэффициентами с общим комплексным корнем. Докажите, что они не взаимно просты.

Опр 2. Многочлен ненулевой степени называется *приводимым* в $K[x]$, если он может быть разложен в произведение двух многочленов меньшей степени из $K[x]$, и *неприводимым* в противном случае.

Зад 4. Приводим ли x^4+1 а) в $\mathbf{R}[x]$ б) в $\mathbf{Q}[x]$?

Факт (*Основная теорема арифметики*). Всякий многочлен в $F[x]$ может быть разложен в произведение числа и неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1, причем такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Предл 5. У всякого многочлена нечетной степени в $\mathbf{R}[x]$ есть действительный корень.

Упр 6. Докажите, что всякий многочлен нечетной степени выше 2 приводим в $\mathbf{R}[x]$.

Опр 3. Поле F алгебраически замкнуто, если каждый непостоянный многочлен из $F[x]$ имеет корень в F .

Упр 7. Являются ли алгебраически замкнутыми поля а) $\mathbf{Q}$; б) $\mathbf{R}$?

Теорема 8 (Основная теорема алгебры) Поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Следствие 9. Всякий многочлен n -й степени $P(x) \in \mathbf{C}[x]$

можно представить в виде $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$,

где $a, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{C}$.

Предл 10. Пусть z – комплексный корень алгебраического уравнения с действительными коэффициентами. Тогда $\bar{z}$ – тоже корень этого уравнения.

Предл 11. В $\mathbf{R}[x]$ всякий многочлен степени выше 2 – приводим.

Теорема 12. В $\mathbf{R}[x]$ всякий многочлен может быть разложен в произведение многочленов 1-й и 2-й степени.

Теорема 13. (Критерий неприводимости Эйзенштейна) Пусть $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ и p – простое число. Если a_n не делится на p , a_i делится на p для всех $i < n$, но a_0 не делится на p^2 , то $A(x)$ неприводим в $\mathbf{Z}[x]$.

Зад 14. Многочлен $f(x) \in \mathbf{Q}[x]$, и $f(\sqrt{2}) = 0$. Докажите, что $f(x)$ делится на $x^2 - 2$.

Зад 15. Перемножили два квадратных трехчлена с целыми коэффициентами. Мог ли получиться многочлен вида $x^4 + 3ax^3 + 6bx^2 + 9cx + 12$, где a, b, c целые?

Зад 16. Разложите на неприводимые в $\mathbf{R}[x]$ многочлен а) $x^{12} - 1$; б) $x^5 - 1$.

Для самостоятельного решения

A1. Докажите, что $\sqrt[3]{2}$ не является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

A2. Докажите, что если p – простое, то $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

A3*. Докажите, что если многочлен неприводим в $\mathbb{Z}[x]$, то он неприводим и в $\mathbb{Q}[x]$.

www.ashap.info/Uroki/KirovLMSH/2007/index.html