

**Двадцать третья Летняя многопредметная школа
Кировской области**

Wish Kill, 3-28 июля 2007 г. 10 класс, группа "профи"

1: Инвариант Дена

Определение 1. Два многогранника называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на конечное число многогранных частей, из которых можно составить другой.

Задача 1. Докажите, что любые два прямоугольных параллелепипеда равного объема равносоставлены.

Задача 2. Перекроите куб в два равных меньших кубика, разрезав куб на как можно меньшее число частей.

Задача 3. Можно ли круг разрезать на конечное число частей по отрезкам и дугам окружностей и составить из них квадрат?

3-я проблема Гильберта: верно ли, что любые два многогранника равного объема равносоставлены?

Определение 2. Пусть у многогранника n ребер. Пусть $l_1, \dots, l_n$ – длины этих ребер, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – величины соответствующих двугранных углов. *Инвариантом Дена* многогранника называется набор пар $(l_1, \varphi_1), \dots, (l_n, \varphi_n)$, рассматриваемый с точностью до подобия.

Определение 3. С набором можно проводить в ту или обратную сторону следующие преобразования:

1. пара (l, φ) заменяется двумя парами $(l', \varphi), (l'', \varphi)$, где $l' + l'' = l$;
2. пара (l, φ) заменяется двумя парами $(l, \varphi'), (l, \varphi'')$, где $\varphi' + \varphi'' = \varphi$;
3. выкидывается пара вида $(0, \varphi)$ или $(l, 2k\pi)$, где k – целое.

Наборы *подобны*, если они получаются друг из друга одним или несколькими из таких преобразований.

Упражнение 4. Найдите простейшие наборы, подобные размерам куба и правильного тетраэдра.

Теорема 5. Если два многогранника равноставлены, то их инварианты Дена подобны.

Теорема 6. Инварианты Дена куба и правильного тетраэдра не подобны.

Теорема 7 (Ден). Куб и правильный тетраэдр не равноставлены.

Для доказательства теоремы 7 потребуются следующие леммы, теоремы и утверждения:

Лемма 8. Если число φ соизмеримо с π , то при любом l пару (l, φ) можно выкинуть из набора.

Теорема 9. Если φ соизмеримо с π и $\cos \varphi$ – рационален, то $\cos \varphi = 0, \pm 1$ или $\pm 0,5$.

Лемма 10. Есть числовая функция на множестве наборов, которая принимает равные значения на подобных наборах, и различные – на наборах тетраэдра и куба.

Для самостоятельного решения

Задача 11. Докажите, что у любой а) прямой б) косой призмы набор Дена подобен пустому набору.

Задача 12. Докажите, что любая призма равноставлена с кубом.

Задача 13. Найдите все углы, соизмеримые с π , у которых тангенс рационален.

Задача 14. Найдите все углы, соизмеримые с π , у которых

а) косинус б) тангенс имеет вид $r_1 \sqrt{r_2}$, где r_1 и r_2 – рациональные числа.

Теорема 15 (обратная) Если у двух многогранников одинаковы объемы и инварианты Дена, то они равноставлены.

www.ashap.info/Uroki/KirovLMSH/2007/index.html