Задача о короле и ладье

Клетки шахматной доски n×n раскрашены в синий и желтый цвета. Докажите, что либо ладья может пройти по синим клеткам с нижнего края на верхний, либо король может пройти с левого края на правый по желтым клеткам (то есть из двух возможностей всегда есть ровно одна!)

Пусть ладья не может пройти как требуется. Добавим снизу синюю горизонталь, перекрасим недостижимые с нее синие клетки в белый цвет, и сделаем жирными все стороны отрезков, отделяющие синюю клетку от желтой.

Лемма1. Из каждого внутреннего узла выходит четное число жирных отрезков.

Лемма2. На верхней и нижней границах нет концов жирных отрезков.

Лемма3. На правой и левой границе есть концы жирных отрезков.

Лемма4. Змейка может по жирным отрезкам проползти с левого края на правый.

Теорема5. Король может пройти по желтым клеткам с левого края на правый.

Лемма6. Если есть такая раскраска, что могут пройти и ладья, и король, то найдется раскраска для доски вдвое больших размеров, на которой ладья может пройти снизу вверх по синим и слева направо по желтым клеткам.

Клетки, которые не требуются для проходов ладьи, сделаем белыми (не цветными!). Назовем такую раскраску ***неожиданной****.*

Лемма7. В неожиданной раскраске нет целиком желтой горизонтали.

Занумеруем горизонтали снизу вверх, и номер горизонтали назовем **высотой** клетки. Выберем для доски данного размера **минимальную** неожиданную раскраску – то есть раскраску с наименьшей возможной суммой высот цветных клеток (почему такая найдется?).

Лемма8. На минимальной раскраске у каждой цветной клетки не более двух соседей ее цвета.

Ситуацию, когда в квадратике 2×2 ровно три клетки – цветные одного цвета, а оставшаяся клетка – нижняя, назовем ***уголком****, при этом оставшуюся клетку квадратика назовем* ***дополнением****, а клетку по диагонали от нее –* ***вершиной*** *уголка.*

Лемма9. В неожиданной раскраске есть уголок.

Упр10. Дополнение уголка либо белая клетка, либо крайняя клетка маршрута противоположного цвета, либо вершина уголка противоположного цвета.

Лемма11. Если дополнение уголка – белая клетка, то раскраска не минимальна.

Лемма12. Если дополнение уголка – крайняя клетка маршрута противоположного цвета, то раскраска не минимальна.

Лемма13. Дополнение уголка с минимальной суммой высот не является вершиной другого уголка.

Лемма14. Неожиданных раскрасок не существует.

Теорема15. При любой раскраске в два цвета верно ровно одно из двух: либо ладья может пройти по синим клеткам снизу вверх, либо король может пройти по желтым клеткам справа налево.
Лемма16. Если существуют две непересекающиеся ломаные внутри квадрата, одна из которых соединяет верхнюю сторону с нижней, а вторая – правую с левой, то существует неожиданная раскраска некоторой шахматной доски.
Теорема17. Если внутри квадрата проведены две ломаные, одна из которых соединяет верхнюю сторону с нижней, а вторая – правую с левой, то эти ломаные пересекаются.

Для самостоятельного решения

Зад18. Докажите, что игра в гекс не может закончится вничью.
Зад19. Клетки шахматной доски $n \times n$ раскрашены в синий и желтый цвета. Докажите, что ферзь может выбрать цвет так, что он мог гулять по всем клеткам этого цвета, не наступая на клетки другого цвета (перепрыгивать можно!).
Зад20. Шах разбил свой квадратный одноэтажный дворец на 64 одинаковые квадратные комнаты, разделил комнаты на квартиры (проделав двери в некоторых перегородках между комнатами) и в каждой квартире поселил по жене. Жены могут ходить по всем комнатам своей квартиры, не заходя к другим. Известно однако, что в каждой комнате есть стенка, общая с какой-нибудь другой квартирой. Какое наименьшее число жен может быть у шаха?